

# Resumo

Neste trabalho é apresentada a solução do problema de Riemann associado a um sistema de leis de conservação. Este sistema é proveniente de um escoamento bifásico unidimensional em meios porosos e considera os efeitos de histerese nas curvas de permeabilidade das fases. A principal contribuição deste trabalho é que a solução do problema de Riemann é obtida para um modelo que leva em conta a histerese nas duas fases e que considera as curvas de embebição e de drenagem distintas sempre que haja uma reversão de regime de drenagem para embebição e vice-versa. Os resultados obtidos aqui ampliam aqueles obtidos para um modelo mais simplificado em que a histerese era considerada apenas numa das fases e as curvas de permeabilidade eram tomadas coincidentes após uma segunda reversão. Uma vez obtida a solução do problema de Riemann, base para a construção de simuladores numéricos de alta precisão, é feita uma comparação entre esta solução e aquela obtida anteriormente, para os mesmo dados iniciais, mostrando que não só as velocidades de ondas podem ser distintas, mas também as próprias sequências de ondas que formam tais soluções.

# Abstract

In this work we present the Riemann solution for a system of conservation laws associated to an unidimensional two-phase flow in a porous media taking into account the hysteresis effects on the permeability curves. Our main contribution in this work is that the solution of the Riemann problem is obtained for a model that takes into account the hysteresis in both wetting and non-wetting phases and considers the scanning curves of imbibition and drainage distincts whenever there is a reversion of regime. The results obtained here improve those obtained for a simplified model where hysteresis is considered only on the non-wetting phase and the scanning curves coincide after a second reversion of regime. Once obtained the solution of the Riemann problem, which is basic for the construction of high accurate numeric simulators, we compare this solution and that one already obtained, for the same initial data, showing that not only the speeds of waves can be distinct, but also the sequences of waves in such solutions.

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Teconologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# O Problema de Riemann para um Escoamento Bifásico em Meios Porosos com Histerese nas Duas Fases.

por

Juliana Aragão de Araújo

sob orientação do

Prof. Dr. Aparecido Jesuino de Souza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB

Maio/2005

# O Problema de Riemann para um Escoamento Bifásico em Meios Porosos com Histerese nas Duas Fases.

por

**Juliana Aragão de Araújo**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Antônio Gilson Barbosa de Lima - DEM/UFCG**

---

**Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota - IM/UFG**

---

**Prof. Dr. Aparecido Jesuino de Souza**

**Orientador**

**Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática**

**Maio/2005**

# Conteúdo

<b>Introdução</b> . . . . .	6
<b>1 O Modelo Físico</b>	<b>9</b>
1.1 Nomenclatura . . . . .	10
1.2 O Fenômeno de Histerese . . . . .	13
1.3 Curvas de Reversão Não-Coincidentes . . . . .	20
<b>2 O Modelo Matemático</b>	<b>24</b>
2.1 Dedução do Modelo Matemático . . . . .	24
<b>3 O Problema de Riemann</b>	<b>30</b>
3.1 A Função de Fluxo Extendida . . . . .	31
3.2 Solução do Problema de Riemann . . . . .	35
<b>4 Conclusões</b>	<b>44</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>45</b>
<b>A Apêndice: Soluções de Problemas de Riemann em Geral</b>	<b>48</b>
A.1 Tipos de Solução . . . . .	48

# Introdução

Quando um reservatório de petróleo é colocado em produção, os fluidos existentes na rocha devem produzir energia suficiente para vencer a resistência oferecida pelos canais porosos e se deslocar para os poços de produção. Em geral, quando essa energia se esgota, uma quantidade significativa de hidrocarbonetos ainda está retida na rocha-reservatório, [22]. Estima-se que apenas 25% do petróleo existente na jazida seja produzido desta forma. Visando aumentar este fator de recuperação, são aplicadas ao reservatório técnicas que, em geral, tentam interferir nas propriedades do meio poroso. Tais técnicas são denominadas de Métodos de Recuperação.

Em [22], os métodos de recuperação são classificados como métodos convencionais e métodos especiais de recuperação. Entre os métodos convencionais são citados a injeção de gás e a injeção de água, além da recuperação pela própria energia do reservatório. Dentre os métodos especiais são citados a combustão *in situ*, injeção de dióxido de carbono, injeção de polímeros dissolvidos em água, e injeção utilizando ondas eletromagnéticas.

Alguns estudos mostram que a injeção alternada de água e gás pode ser mais eficiente do que a injeção separada de cada um desses fluidos, como pode ser visto em [4]. Este tipo de método é denominado de método cíclico. Quando um método cíclico de recuperação de petróleo é aplicado num reservatório, surge um fenômeno denominado de histerese. Tal fenômeno ocorre devido aos vários regimes de drenagem e de embebição pelos quais o fluido é submetido. No contexto de escoamento em meios porosos, a histerese é caracterizada pelo fato de que as propriedades do fluido, como capilaridade e permeabilidade relativa, medidas durante um regime de drenagem têm valor diferente quando medidas durante um regime de embebição. Experimentos relatados

em [5], [10], [6] e [14] comprovam a existência deste fenômeno. Em particular, para um escoamento bifásico, eles mostram a existência de curvas distintas de permeabilidade relativa de drenagem e de embebição para cada uma das fases.

Além de curvas de drenagem e de embebição distintas, os experimentos mostram também a existência das chamadas curvas *scanning*, denominadas neste trabalho de curvas de reversão. Tais curvas são geradas quando ocorre uma reversão do regime de drenagem para embebição ou vice-versa. Ainda em [5] é mostrado para cada uma das fases, o fato de que as curvas de transição geradas durante uma reversão de drenagem para embebição são diferentes daquelas geradas por uma nova reversão de embebição para drenagem em sequência. Fato este que também é citado em [13] e [12]. Esta característica de não coincidência das curvas de transição após cada reversão de regime, é denominada neste trabalho de irreversibilidade.

Um primeiro modelo matematicamente rigoroso para um escoamento bifásico (água/óleo) levando em conta os efeitos da histerese foi proposto em [17], sendo que naquele trabalho apenas as curvas de permeabilidade relativa de drenagem e de embebição, da fase óleo, foram consideradas distintas, não foram consideradas as curvas de transição e os efeitos da histerese na fase água não foram considerados. Um outro modelo para o escoamento bifásico (água/óleo) em que se considerava a presença de um polímero dissolvido na água foi proposto em [8]. Naquele modelo foram incorporadas as curvas de transição, mas também apenas para a fase óleo. Depois disso, [3] passaram a analisar também modelos bifásicos considerando as curvas de transição e relacionando o fenômeno de histerese em processos de injeção alternada. Tivemos ainda uma generalização deste modelo para o caso trifásico, feita em [21]. Ainda em relação aos modelos bifásicos, [18], propuseram uma outra modelagem do processo de histerese. Esta modelagem baseia-se num processo de relaxação, e que vem a justificar o método numérico do tipo Godunov corrigido, entretanto, tal modelo considera ainda a histerese apenas na fase óleo. Do ponto de vista prático, esta modelagem é interessante por dar origem a um método numérico para modelagem de histerese a um parâmetro de memória, que pode ser adaptada a um grande número de métodos numéricos e simuladores existentes. No contexto de métodos de Euler upstream, tal método numérico já foi testado exaustivamente em escoamento bifásico com bons resultados. Em alguns testes preliminares, feitos a pedido do CENPES/PETROBRÁS, em que era

necessário levar em conta os efeitos de histerese em simulações de certos reservatórios da bacia de Campos, este método funcionou adequadamente. Entretanto ficou clara a necessidade de utilizar dois parâmetros de memória, um para o gás e outro para o óleo, a serem utilizados especialmente em simulação de escoamento trifásico.

Em [13] temos um modelo para o escoamento bifásico (água/óleo) que considera a histerese nas duas fases do fluido e a irreversibilidade das curvas de transição. Entretanto, ele não apresenta a solução do problema de Riemann associado ao modelo. O estudo da solução deste problema de Riemann é muito importante, tais problemas representam matematicamente uma situação de injeção alternada de água e óleo no reservatório. Sendo assim, as soluções podem ser usadas na validação de métodos numéricos, que serão utilizados em simuladores numéricos, que podem prever e otimizar a produção no reservatório.

Neste trabalho é apresentado um modelo matemático que considera os efeitos da histerese nas duas fases do fluido e que as curvas de reversão são não coincidentes. Em seguida é resolvido o problema de Riemann associado a tal modelo para alguns casos específicos. Por fim, ainda são feitas algumas comparações entre o modelo considerado neste trabalho e um modelo que considere apenas os efeitos da histerese na fase óleo e que as curvas de reversão são coincidentes.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

Capítulo 1: Apresentação da nomenclatura utilizada neste trabalho, definição de algumas características importantes do reservatório, dos fluidos e do escoamento e também do que seja o fenômeno de histerese.

Capítulo 2: Apresentação das hipóteses sob as quais ocorre o escoamento bifásico e dedução do modelo matemático que governa tal escoamento.

Capítulo 3: A apresentação da solução do problema de Riemann associado ao modelo obtido no Capítulo 2, para um caso particular.

Capítulo 4: Apresentação das conclusões obtidas neste trabalho.

Apêndice A: Apresentação dos conceitos fundamentais que norteiam a construção da solução do problemas de Riemann para uma equação escalar em geral.

# Capítulo 1

## O Modelo Físico

Neste capítulo apresentamos a nomenclatura utilizada neste trabalho, algumas definições que serão importantes durante a leitura deste e também apresentamos o modelo de um escoamento bifásico, levando em conta o fenômeno de histerese, sob as seguintes hipóteses:

H1 - O escoamento é bifásico e unidimensional;

H2 - O escoamento é isotérmico;

H3 - O fluido ocupa todo o espaço poroso da rocha;

H4 - A porosidade do meio é constante;

H5 - Os efeitos gravitacionais, os efeitos de compressibilidade das fases e da rocha e os efeitos de pressão capilar entre as fases são desprezados;

H6 - As duas fases são imiscíveis;

H7 - A fase molhante é a fase-1 e a fase não-molhante é a fase-2;

H8 - Não existem fontes ou sumidouros;

H9 - Os efeitos do fenômeno de histerese estão presentes nas duas fases do fluido;

H10 - As curvas de reversão (*scanning*) drenagem são diferentes das curvas de reversão para embebição.

## 1.1 Nomenclatura

- $\phi$ : Porosidade do meio - A *porosidade* do meio é definida como sendo a razão entre o volume de poros,  $V_p$ , e o volume total da rocha,  $V_t$ , ou seja,

$$\phi = \frac{V_p}{V_t}, \quad (1.1)$$

onde  $V_t$  é a soma do volume poroso,  $V_p$ , com o volume de sólidos,  $V_s$ , [22]. Quando  $V_p$  é tomado como sendo apenas o volume dos poros que estão interligados, a porosidade é denominada *efetiva*. Se  $V_p$  representa o volume total dos poros, interligados ou não, a porosidade é denominada *absoluta*. Entretanto, o óleo depositado nos poros que não estão interligados não pode ser recuperado. Logo a porosidade efetiva é que representa o volume total de fluido que pode ser recuperado, e é a esta porosidade que estaremos nos referindo neste trabalho;

- $K$ : Permeabilidade absoluta do meio poroso - A *permeabilidade absoluta* do meio,  $K$ , é a medida da capacidade de uma rocha permitir o fluxo de um fluido, quando existe apenas este fluido no meio. Quando existe mais de um fluido, a facilidade com que cada um flui é denominada de *permeabilidade efetiva*;
- $g$ : Gravidade;
- $s_i$ : Saturação da fase  $i$ ,  $i = 1, 2$  - Denomina-se *saturação* da fase  $i$  o percentual do volume poroso ocupado pela fase  $i$ ;
- $P_i$ : Pressão da fase  $i$ ,  $i = 1, 2$ ;
- $\rho_i$ : Densidade da fase  $i$ ,  $i = 1, 2$ ;
- $v_i$ : Velocidade de Darcy da fase  $i$ ,  $i = 1, 2$  - A velocidade da fase  $i$ , ou velocidade de Darcy, é definida como sendo o volume de fluido na fase  $i$ ,  $\dot{Q}_i$ , que atravessa uma secção transversal reta da rocha, de área  $A$ , por unidade de tempo, ou seja

$$v_i = \frac{\dot{Q}_i}{A}; \quad (1.2)$$

- $v$ : Velocidade Total de Darcy - Somatório da velocidade de Darcy das fases, ou seja,

$$v = v_1 + v_2; \quad (1.3)$$

- $L$ : Comprimento do meio poroso;
- $P_c$ : Pressão capilar - É definida como sendo a diferença entre as pressões das fases, ou seja, ( $P_c = P_2 - P_1$ );
- $\mu_i$ : Viscosidade da fase  $i$ ,  $i = 1, 2$  - A viscosidade é uma medida da resistência que todo fluido real oferece ao movimento de qualquer de suas partes;
- $k_{ri}$ : Permeabilidade relativa da fase  $i$ ,  $i = 1, 2$  - A *permeabilidade relativa* da fase  $i$ , é a razão entre a permeabilidade relativa da fase  $i$  e a permeabilidade absoluta do meio. Neste trabalho, estaremos utilizando o modelo de Corey para as permeabilidades relativas, ou seja, a permeabilidade relativa da fase  $i$  é da forma  $k_{ri}(s_i) = s_i^p$ , onde  $p > 1$ ;
- $\lambda_i$ : Mobilidade relativa da fase  $i$ ,  $i = 1, 2$  - A *mobilidade* da fase  $i$  é a razão entre sua permeabilidade relativa e a sua viscosidade;
- $\lambda$ : Mobilidade total, onde  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ ;
- $f_i$ : Função de fluxo fracionário da fase  $i$ ,  $i = 1, 2$  - É definida como sendo a razão entre o fluxo da fase  $i$ ,  $\dot{Q}_i$ , e o fluxo total,  $\dot{Q}$ , ou seja

$$f_i = \frac{\dot{Q}_i}{\dot{Q}}; \quad (1.4)$$

- $x$ : Variável espacial unidimensional;
- $t$ : Variável temporal.

Além destes, um conceito bastante importante a ser considerado neste trabalho é a *molhabilidade*. Esta é uma propriedade que varia de acordo com os fluidos e com o meio poroso em questão. Considere a Figura 1.1, retirada de [19], que apresenta um esquema do equilíbrio de forças em uma interface óleo/água/sólido. O ângulo de contato,  $\theta$ ,  $0 < \theta < 180^\circ$ , é o ângulo medido no líquido mais denso, no caso a água. Se este ângulo for maior que  $90^\circ$ , diz-se que o meio é molhável preferencialmente pelo líquido mais denso. Se o ângulo for menor que  $90^\circ$  diz-se que o líquido menos denso molha preferencialmente o meio.

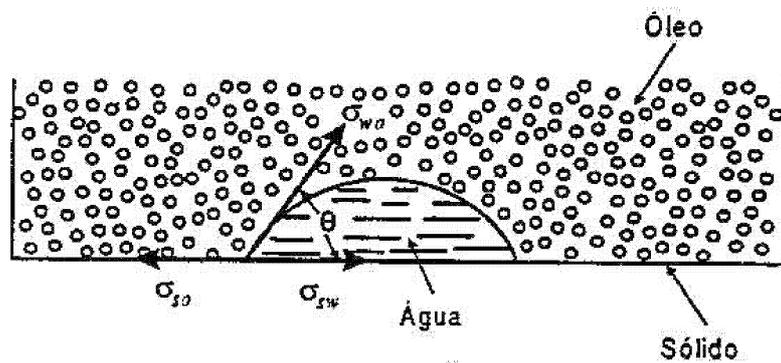


Figura 1.1: Ângulo de Contato (Fonte:[19]).

Nas Figuras 1.2 e 1.3, também extraídas de [19], temos uma representação da distribuição dos fluidos, água, gás e óleo, no reservatório considerando que a água seja o fluido molhante e que o óleo seja o fluido molhante, respectivamente.

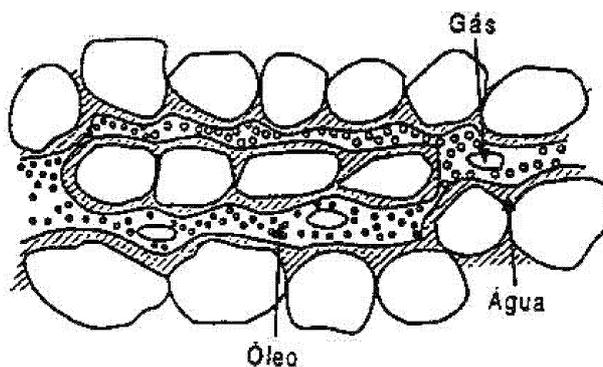


Figura 1.2: Distribuição dos Fluidos num meio Molhável Preferencialmente por Água (Fonte:[19]).

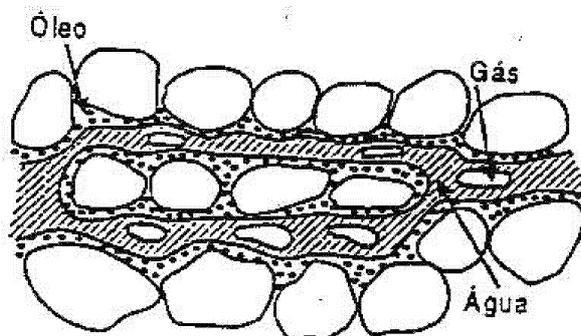


Figura 1.3: Distribuição dos Fluidos num meio Molhável Preferencialmente por Óleo (Fonte:[19]).

O fluido molhante forma uma camada fina, como um filme, que adere às paredes dos poros. Além disso, a fase não-molhante ocupa o centro dos poros maiores. Na Figura 1.4, extraída de [1], podemos observar o comportamento do escoamento quando a água invade o meio, sendo o meio molhável por água em (a) e molhável por óleo em (b).

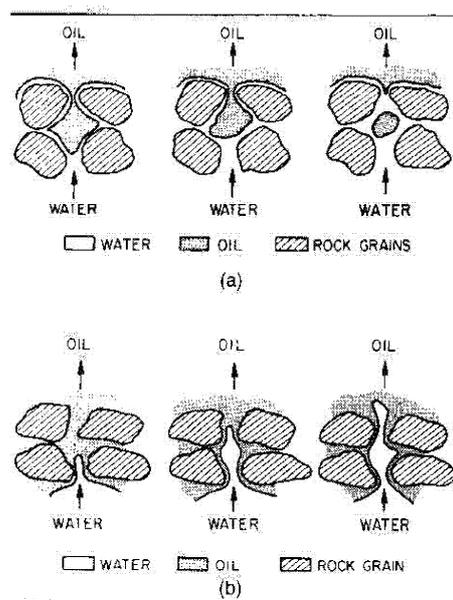


Figura 1.4: Deslocamento de Óleo por Água (Fonte:[1]).

A literatura sugere que a maioria dos reservatórios não é molhável nem por água nem por óleo, mas tem molhabilidade mista. Neste trabalho, estamos considerando que um dos fluidos molha preferencialmente o meio, mas sem discriminar se este fluido seja o óleo ou a água.

Temos ainda dois termos que serão citados durante todo este trabalho: *drenagem* e *embebição*. O termo drenagem se refere aos regimes em que a saturação da fase molhante, no nosso caso a fase-1, num volume de controle, seja decrescente com o tempo. Por outro lado, o termo embebição se refere aos regimes em que a saturação da fase molhante seja crescente com o tempo.

## 1.2 O Fenômeno de Histerese

A histerese é um fenômeno não-linear que ocorre em sistemas que representam certos fenômenos físicos, econômicos e biológicos. Uma propriedade de sistemas que

não respondem instantaneamente às forças aplicadas sobre eles, reagem lentamente, e podem não retornar completamente ao seu estado original, isto é, sistemas cujos estados dependem da sua história passada e do seu estado atual [24].

Em escoamentos em meios porosos, a histerese é caracterizada pelo fato de que as propriedades do fluido obtidas durante um regime de drenagem (quando a saturação da fase molhante decresce) são diferentes das obtidas durante um regime de embebição (quando a saturação da fase molhante cresce). Em particular, experimentos relatados em [10], [6], [5] e [14] mostram que a curva de permeabilidade relativa obtida durante um regime de drenagem é diferente da obtida durante um regime de embebição, tanto para a fase molhante quanto para a não-molhante, sendo que a histerese na fase não-molhante é mais destacada. Ou seja, as curvas de permeabilidade relativa de drenagem e de embebição da fase não-molhante estão mais afastadas entre si do que as da fase molhante.

As curvas de permeabilidade relativa de drenagem e de embebição são obtidas, geralmente, em ensaios feitos em laboratório com amostras do reservatório em questão. A seguir, fazemos uma descrição de como estas curvas são obtidas, baseada nos experimentos relatados em [5] e em [13]. Esta descrição pode ser acompanhada na Figura 1.5 extraída de [13].

Considere uma amostra totalmente saturada com a fase molhante. Neste caso, inicialmente a permeabilidade relativa da fase molhante tem valor máximo e a da fase não-molhante é nula. Na Figura 1.5, são apresentadas as curvas de permeabilidade relativa de drenagem primária ([0]), embebição primária ([1]) e drenagem secundária ([2]) para um escoamento água/óleo, vamos considerar a água como a fase molhante e o óleo como a fase não-molhante. Suponha, então, que a saturação da fase molhante vá diminuindo gradativamente enquanto a da fase não-molhante vá aumentando, caracterizando um regime de drenagem. A fase não-molhante só começará a fluir quando a sua saturação alcançar um certo valor, denominado de saturação crítica,  $s_{2c}$ . A partir daí, a permeabilidade relativa da fase não-molhante passa a crescer e continua com esta tendência enquanto a saturação desta fase também estiver crescendo, isto é, enquanto a saturação da fase molhante estiver decrescendo. Por outro lado, simultaneamente, a permeabilidade relativa da fase molhante continua diminuindo até que esta fase deixe de fluir, quando sua saturação atingir um certo valor mínimo, denominado de saturação

residual,  $s_{1r}$ . Portanto, para este valor mínimo, a permeabilidade relativa da fase molhante será nula. As curvas de permeabilidade relativa obtidas para as fases molhante e não-molhante durante este regime são denominadas curvas de permeabilidade relativa de drenagem primária.

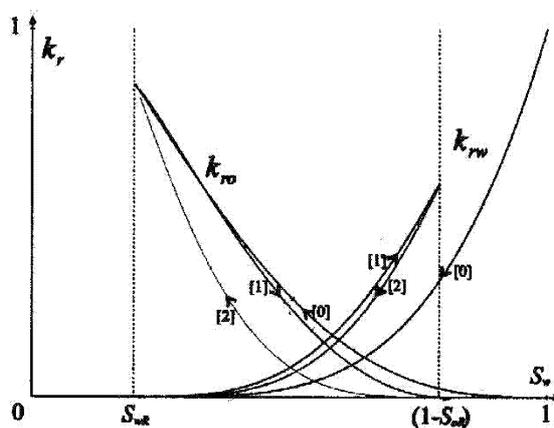


Figura 1.5: Curvas de Permeabilidade Relativa das Fases 1 e 2.

De maneira análoga, suponha agora que a amostra esteja totalmente saturada com a fase não-molhante e que a saturação da fase molhante vá aumentando gradativamente, temos portanto um regime de embebição. No início do regime a permeabilidade relativa da fase não-molhante tem valor máximo e da fase molhante é nula. Esses valores permanecem inalterados até que a saturação da fase molhante atinja a saturação residual e comece a fluir. A partir daí, a saturação da fase molhante continua aumentando, assim como a permeabilidade relativa desta fase, enquanto a permeabilidade relativa da fase não-molhante vai decrescendo até que a saturação desta fase atinja o seu valor mínimo, denominado saturação residual,  $s_{2r}$ , e tal fase deixe de fluir. Quando a saturação da fase não-molhante atinge este valor, da hipótese H2 temos que a saturação da fase molhante é dada por  $1 - s_{2r}$ . As curvas de permeabilidade relativa das fases molhante e não-molhante, obtidas durante este regime são denominadas de curvas de permeabilidade relativa de embebição primária. Como pode ser observado também na Figura 1.5 as curvas de drenagem primária e de embebição primária de cada fase são distintas, caracterizando a histerese.

Se a partir deste ponto o regime de drenagem for repetido, obtemos as curvas de permeabilidade relativa de drenagem secundária das fases molhante e não-molhante.

Como a drenagem primária está associada ao processo natural de recuperação de petróleo por diferença de pressão, vamos fixar neste trabalho o que ocorre a partir de uma embebição primária e de uma drenagem secundária. As curvas de permeabilidade relativa, da fase  $i$ , referentes a estes regimes são denominadas aqui de  $k_{ri}^E$  e  $k_{ri}^D$ , respectivamente. Na Figura 1.5 estas curvas correspondem às curvas [1] e [2]. Durante este trabalho, vamos nos referir a estas curvas também como curvas de permeabilidade relativa extremas, ou apenas curvas extremas.

A hipótese H2 nos diz que o fluido ocupa todo o espaço poroso da rocha, sendo assim, temos que em  $s_1 + s_2 = 1$ . É feita, então, a seguinte normalização para as saturações das fases molhante e não-molhante:

$$s_1^* = \frac{s_1 - s_{1r}}{1 - s_{1r} - s_{2r}}, \quad (1.5)$$

$$s_2^* = \frac{s_2 - s_{2r}}{1 - s_{1r} - s_{2r}}, \quad (1.6)$$

onde  $s_1$  é a saturação da fase molhante,  $s_{1r}$  é a saturação residual da fase molhante,  $s_2$  é a saturação da fase não-molhante,  $s_{2r}$  é a saturação residual da fase não-molhante. A partir desta normalização e da hipótese H2, temos que  $s_1^* + s_2^* = 1$ . Sendo assim, fazemos

$$s = s_1^* = 1 - s_2^*. \quad (1.7)$$

Utilizando as saturações normalizadas, a permeabilidade relativa de embebição primária e drenagem secundária das fases molhante e não molhante estão representadas na Figura 1.6.

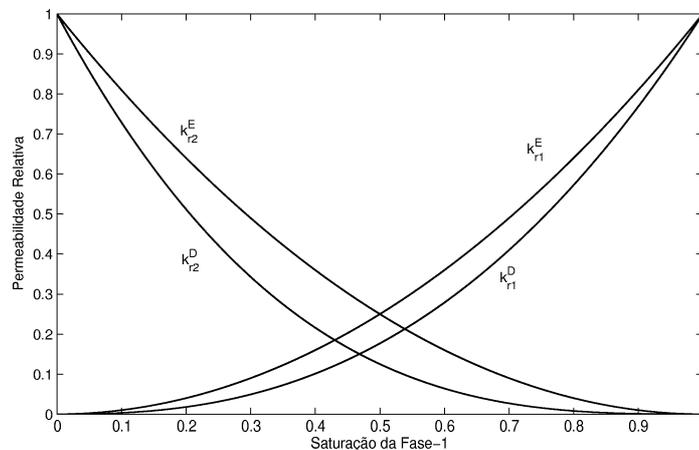


Figura 1.6: Curvas de Permeabilidade Relativa com a Saturação Normalizada.

Considere, então, que o regime de embebição primária tenha início com o crescimento da saturação da fase molhante e o conseqüente decréscimo da saturação da fase não-molhante. Acompanhe nas Figuras 1.7 e 1.8 para a fase não-molhante, sendo a Figura 1.8 uma ampliação de parte da Figura 1.7. Suponha então, que antes que a saturação residual da fase não-molhante seja atingida, haja uma reversão na tendência de crescimento das saturações das fases, ou seja o regime passe de embebição para drenagem, num certo valor de saturação da fase molhante que denotaremos por  $s^E$ . Neste caso, devido ao fenômeno de histerese, uma nova curva de permeabilidade relativa,  $k_{ri}^{ED}$ , é gerada, a partir do valor de saturação  $s^E$ . Tal curva é, então, denominada curva de permeabilidade relativa de reversão de embebição para drenagem. A menos que uma nova reversão aconteça esta curva alcançará a curva de drenagem extrema (secundária) num valor de saturação que denominaremos de  $s^D$ , como mostram as Figuras 1.7 e 1.8 para a fase não-molhante. Analogamente, considere que o regime de drenagem secundária tenha início e, antes que a saturação irreduzível da fase molhante seja atingida, haja uma reversão na tendência de crescimento das saturações das fases, ou seja, o regime passe de drenagem para embebição, digamos na mesma saturação  $s^D$ . Neste caso também, uma nova curva de permeabilidade relativa é gerada, denominada curva de permeabilidade relativa de transição para embebição, denotada por  $k_{ri}^{DE}$ . Experimentos relatados em [13] mostram que a menos que haja uma nova reversão tal curva interceptará a curva de embebição exatamente na saturação  $s^E$ .

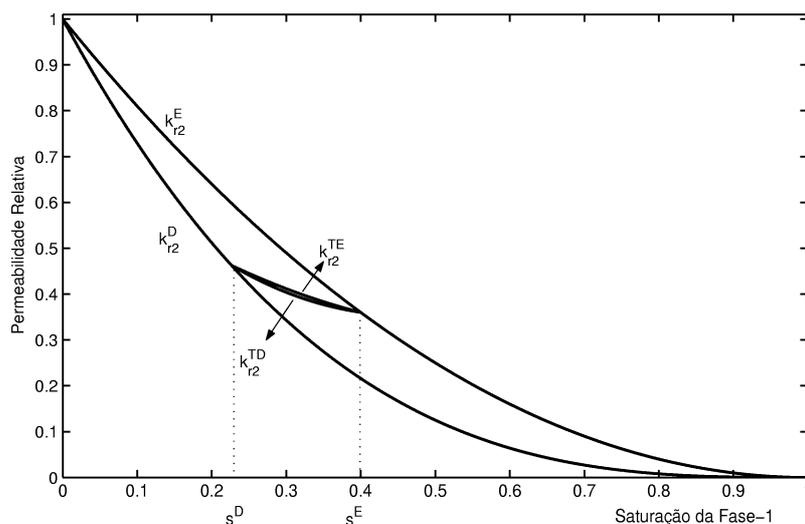


Figura 1.7: Curvas de Permeabilidade Relativa de Reversão.

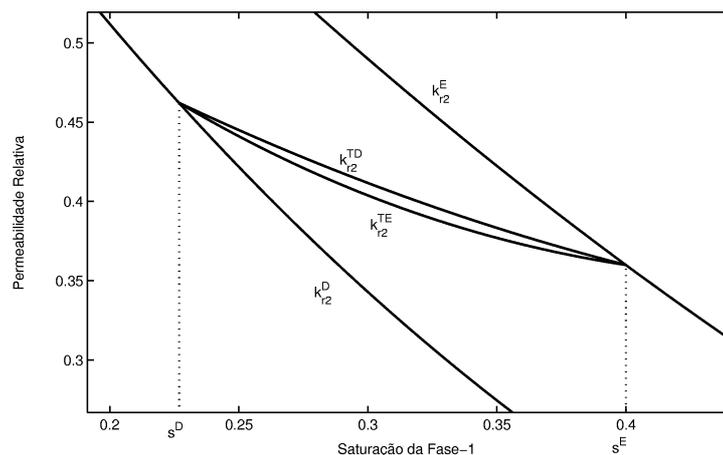


Figura 1.8: Curvas de Permeabilidade Relativa de Reversão.

Na Figura 1.9 temos ilustradas as curvas de permeabilidade extrema e várias curvas de reversão para drenagem e para embebição das duas fases.

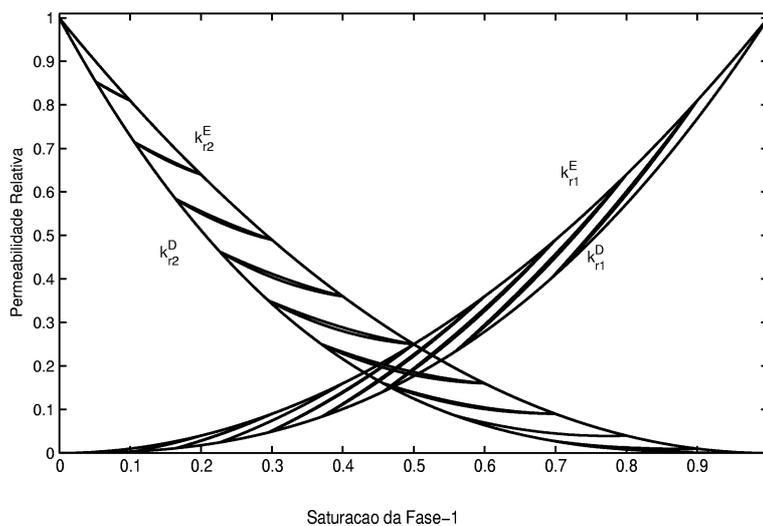


Figura 1.9: Curvas de Permeabilidade Relativa de Reversão.

Para cada valor de  $s^D$  temos associado um valor de  $s^E$ , sendo que esses valores estão associados à primeira reversão que ocorre a partir das curvas extremas. Esta primeira reversão, por sua vez, está associada a um parâmetro  $\pi$ , denominado o parâmetro de histerese. Tal parâmetro assume valores no intervalo  $[0, 1]$ , e a cada valor de  $\pi$  temos associado um par de curvas de reversão, uma de reversão para drenagem e uma de reversão para embebição, de modo ao variarmos o valor de  $\pi$ , toda região delimitada pelas curvas extremas é folheada pelas curvas de reversão, como ilustrado

na Figura 1.9. As saturações  $s^D$  e  $s^E$  podem ser obtidas implicitamente como funções de  $\pi$  resolvendo-se, respectivamente, as equações, [18]:

$$k_{ri}^D(s) = k_{ri}^{ED}(s, \pi), i = 1, 2, \quad (1.8)$$

$$k_{ri}^E(s) = k_{ri}^{DE}(s, \pi), i = 1, 2. \quad (1.9)$$

Fazendo  $i = 1$  ou  $i = 2$  em (1.8) e (1.9) obtemos os mesmos valores de  $s^D(\pi)$  e  $s^E(\pi)$ . Em [18] é mostrado que as funções  $s^D(\pi)$  e  $s^E(\pi)$  são monótonas e conseqüentemente também temos:

$$\pi = \pi^D(s), \quad (1.10)$$

$$\pi = \pi^E(s), \quad (1.11)$$

ao longo das curvas extremas. Portanto o domínio das variáveis dependentes é dado por:

$$\Omega = \{(s, \pi) \in (0, 1) \times (0, 1) : s^D(\pi) \leq s \leq s^E(\pi)\}. \quad (1.12)$$

Este domínio está representada na Figura 1.10.

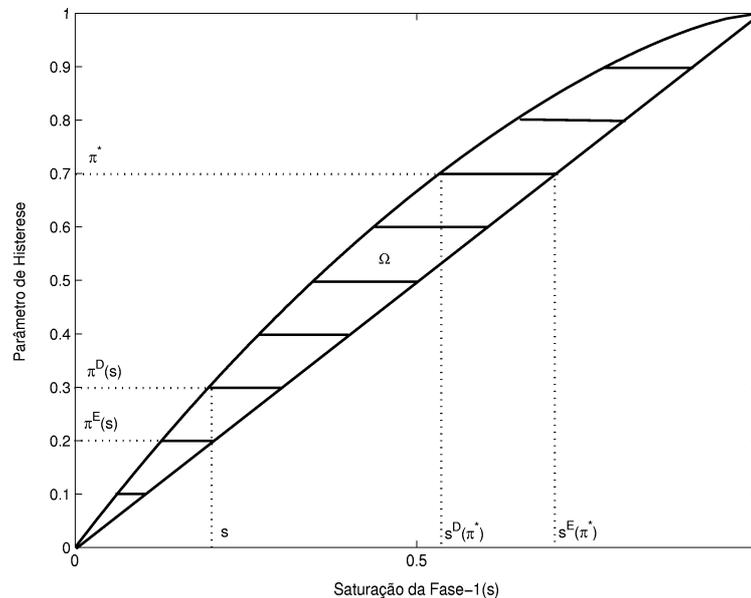


Figura 1.10: Gráfico da Saturação da Fase Molhante versus Parâmetro de Histerese.

**Observação 1.1** Neste trabalho, às vezes vamos nos referir às curvas de permeabilidade relativa de reversão de embebição para drenagem,  $k_{ri}^{ED}$ , apenas como curvas de reversão para drenagem. Analogamente, vamos nos referir às curvas de permeabilidade

relativa de reversão de drenagem para embebição,  $k_{ri}^{ED}$ , como curvas de reversão para embebição. Observe que o superscrito  $ED$  ou  $DE$  reflete exatamente o tipo de reversão, embebição para drenagem, ou drenagem para embebição, respectivamente.

Embora as curvas de reversão para drenagem e para embebição, de cada fase, sejam distintas, e o fenômeno de histerese esteja presente nas duas fases do fluido, como observado em [5], [13], [23] e em outros trabalhos, num primeiro modelo simplificado, tendo em vista que a histerese na fase molhante é mais fraca, vários autores consideram que a histerese esteja presente apenas na fase não-molhante do fluido. Além disso, eles ainda fazem uma simplificação adicional de que as curvas de reversão são coincidentes, ou seja, a saturação  $s$  entre  $s^D$  e  $s^E$  as reversões não afetam as curvas de permeabilidade. Nossa principal contribuição neste trabalho é considerar o modelo mais completo como em [13], que leva em conta tanto a histerese nas duas fases como o fato de as curvas de reversão serem não-coincidentes.

### 1.3 Curvas de Reversão Não-Coincidentes

Antes de fazer a dedução do modelo matemático que considera a histerese na curva de permeabilidade das duas fases e, além disso, considerar que as curvas de reversão para drenagem e para embebição são não coincidentes, vamos detalhar um pouco mais esta característica das curvas de reversão. O fenômeno que descreveremos a seguir pode ser acompanhado nas Figuras 1.11 e 1.12, sendo a Figura 1.12 uma ampliação de parte da Figura 1.11. Nestas figuras usaremos a notação  $S[j]$  para denotar os pontos onde acontecem as reversões, tais pontos têm abcissa dada por  $s[j]$ , sendo que o inteiro “ $j$ ” servirá como indexador para as reversões.

Suponha que o escoamento se inicie no regime de drenagem. Enquanto a saturação da fase molhante é decrescente, as permeabilidades relativas das fases são dadas segundo as respectivas curvas de drenagem, ou seja, segundo  $k_{ri}^D$ ,  $i = 1, 2$ . Suponha que num certo valor de saturação  $s[1]$  ocorra uma reversão do regime de drenagem para embebição. Tal valor de saturação,  $s[1]$ , é igual a  $s^D(\pi)$  para alguma valor de  $\pi$  e também está associado ao valor  $s[0] = s^E(\pi)$  pelo parâmetro de histerese. Então a partir deste valor de saturação, as permeabilidades relativas das fases são dadas segundo a curva de reversão para embebição que é gerada no valor de saturação  $s[1]$ .

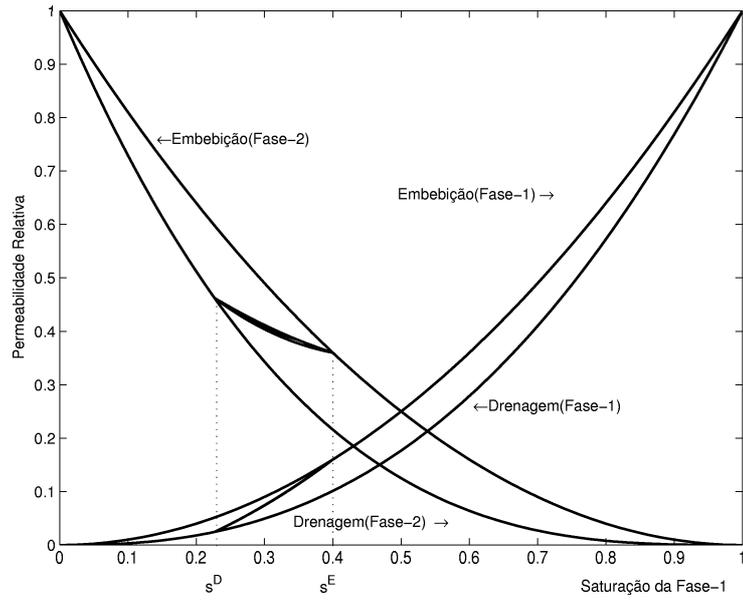


Figura 1.11: Curvas de Permeabilidade Relativa de Reversão.

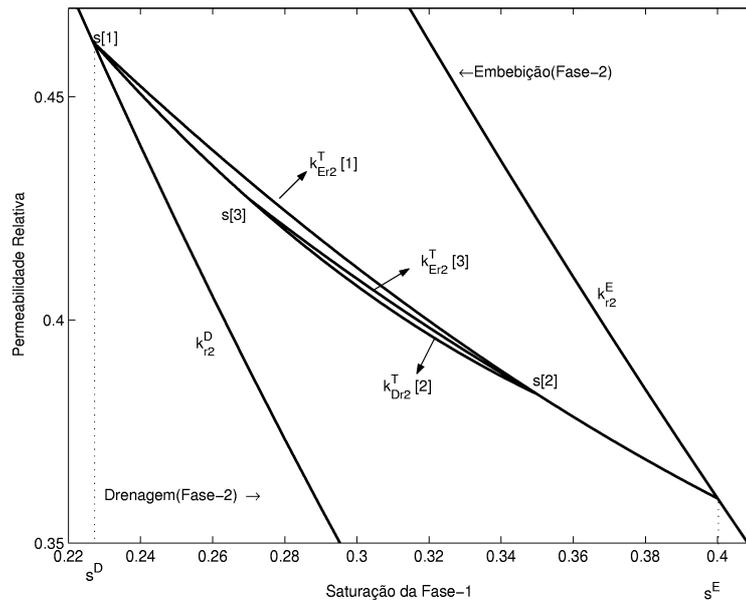


Figura 1.12: Curvas de Permeabilidade Relativa de Reversão.

Denotaremos esta curva por  $k_{r_i}^{DE}[1]$ ,  $i = 1, 2$ , como mostra a Figura 1.12, para a fase não-molhante. Se não houver nenhuma outra reversão, então a permeabilidade relativa de cada fase é dada segundo esta curva de reversão,  $k_{r_i}^{DE}[1]$ , até que o valor de saturação  $s^E(\pi)$  seja atingido, e a partir deste valor, as permeabilidades relativas das fases são dadas pelas curvas de embebição extremas,  $k_{r_i}^E$ ,  $i = 1, 2$ . No entanto, suponha que antes da saturação  $s^E(\pi) = s[0]$  ser atingida, uma outra reversão aconteça para

um certo valor de saturação  $s[2]$  entre  $s[1]$  e  $s^E(\pi)$ , mudando o regime de embebição para drenagem. Neste caso, a permeabilidade relativa de cada fase passa a ser dada pela curva de permeabilidade relativa de reversão para drenagem que é gerada a partir de  $s[2]$ . Denotaremos esta curva por  $k_{ri}^{ED}[2]$ . Tal curva está definida para valores de  $s$  entre  $s[2]$  e  $s[1]$ . Caso nenhuma outra reversão aconteça, então as permeabilidades relativas das fases são dadas segundo a curva  $k_{ri}^{ED}[2]$ ,  $i = 1, 2$  até que a saturação  $s[1]$  seja atingida e a partir daí continua segundo a curva de drenagem extrema,  $k_{ri}^D$ . Isto pode ser acompanhado com mais detalhes na Figura 1.12 para a fase-2, não-molhante. Suponha, que antes da saturação  $s[1]$  ser atingida uma outra reversão aconteça, digamos no valor de saturação  $s[3]$ . Então a partir desta saturação, as permeabilidades relativas das fases, que eram dadas segundo a curva  $k_{ri}^{ED}[2]$ , passam a ser dadas segundo uma nova curva de reversão para embebição que é gerada a partir da saturação  $s[3]$ . Denotaremos esta curva por  $k_{ri}^{DE}[3]$ , tal curva está definida para  $s$  entre  $s[3]$  e  $s[2]$ . Se nenhuma outra reversão após  $s[3]$  ocorrer, então a permeabilidade relativa de cada fase, é dada segundo a curva  $k_{ri}^{DE}[3]$  até que a saturação  $s[2]$  seja atingida. A partir do valor  $s[2]$  de saturação, a permeabilidade relativa de cada uma das fases é dada segundo a curva  $k_{ri}^{DE}[1]$  até que a saturação  $s^E(\pi) = s[0]$  seja atingida, e a partir desta saturação, segundo a curva de embebição extrema,  $k_{ri}^E$ ,  $i = 1, 2$ , até o valor de saturação  $s = 1$ .

Continuando neste raciocínio, este processo pode ser repetido um número finito de vezes, podendo ser modelado pelo parâmetro de histerese  $\pi$ , onde ocorre a primeira reversão, e por todos os valores de saturação onde ocorrem as reversões.

De modo geral, suponha que o escoamento tenha se iniciado num regime de drenagem, que já aconteceram  $j$  reversões, em  $s[1] = s^D(\pi)$ ,  $s[2]$ , ...,  $s[j]$ , e a que  $(j + 1)$ -ésima reversão ocorre na saturação  $s[j + 1]$ :

- Se  $j$  for par, uma nova curva de reversão para embebição, denotada por  $k_{ri}^{DE}[j+1]$ , será gerada a partir de  $s[j + 1]$ . Tal curva está definida para  $s$  entre  $s[j + 1]$  e  $s[j]$ , sendo  $s[j + 1] < s[j]$ . Como mostra a Figura 1.13.
- Analogamente, se  $j$  for ímpar, uma nova curva de reversão para drenagem, denotada por  $k_{ri}^{ED}[j + 1]$ , será gerada. Tal curva está definida para  $s$  entre  $s[j]$  e  $s[j + 1]$ , sendo  $s[j] < s[j + 1]$ . Como mostra a Figura 1.14.

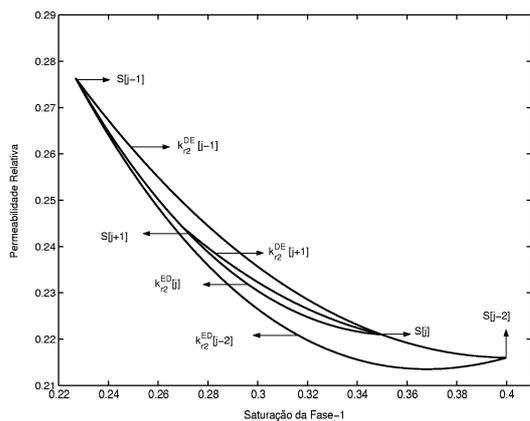


Figura 1.13: Curvas de Reversão-Caso Geral ( $j$  par)

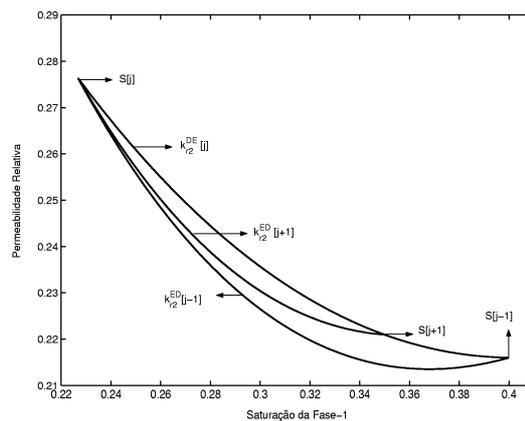


Figura 1.14: Curvas de Reversão-Caso Geral ( $j$  ímpar)

Temos uma descrição análoga se considerarmos que o escoamento teve início num regime de embebição.

# Capítulo 2

## O Modelo Matemático

Neste capítulo apresentamos um modelo matemático o modelo físico deduzido no Capítulo 1.

### 2.1 Dedução do Modelo Matemático

A dedução do modelo matemático que apresentaremos aqui é baseada no procedimento feito em [18], sendo que naquele trabalho os autores consideraram os efeitos do fenômeno de histerese apenas na fase não-molhante do fluido, e que as curvas de reversão eram coincidentes. Vamos incorporar àquele modelo os efeitos da histerese na fase molhante e o fato das curvas de reversão serem não coincidentes. A dedução feita aqui considera as saturações já normalizadas, mas para não carregar a notação fazemos  $s_{ri}^* = s_{ri}$ .

A obtenção do modelo matemático para escoamentos bifásicos em meios porosos baseia-se em dois princípios fundamentais:

- A equação do balanço de massa da fase  $i$ : 
$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_i s_i) + \frac{\partial}{\partial k}(\rho_i v_i) = 0, i = 1, 2,$$
- A lei de Darcy para cada fase  $i$ : 
$$\dot{Q}_i = -A \frac{K}{\mu_i} k_{ri} \frac{\partial P_i}{\partial x}, i = 1, 2.$$

Como a porosidade,  $\phi$ , e a densidade das fases,  $\rho_i, i = 1, 2$ , são consideradas constantes, a equação do balanço de massa torna-se

$$\phi \frac{\partial}{\partial t}(s_i) + \frac{\partial}{\partial x}(v_i) = 0, i = 1, 2. \quad (2.1)$$

Somando (2.1) para  $i = 1$  com (2.1) para  $i = 2$ , temos

$$\phi \frac{\partial}{\partial t}(s_1 + s_2) + \frac{\partial}{\partial x}(v_1 + v_2) = 0. \quad (2.2)$$

Sendo assim, de (2.2), da hipótese H2 e de (1.3), temos

$$\frac{\partial}{\partial x}(v) = 0. \quad (2.3)$$

A equação (2.3) é conhecida como equação de conservação de massa total. Desta equação temos que  $v$  é função apenas do tempo, o que caracteriza a incompressibilidade do fluido.

Expressando as funções de fluxo fracionário, (1.4), em termos das velocidades de Darcy, obtemos que

$$f_i = \frac{v_i}{v} \quad \text{ou então} \quad v_i = v f_i, \quad \text{para} \quad i = 1, 2. \quad (2.4)$$

Substituindo (2.4) em (2.1), e lembrando que a porosidade e a densidade das fases são constantes, e que  $v$  é constante em relação à variável espacial, temos que

$$\frac{\partial}{\partial t}(s_i) + \frac{v}{\phi} \frac{\partial}{\partial x}(f_i) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.5)$$

Fazemos, então uma mudança de variável, nas variáveis espacial e temporal, que é dada a seguir, juntamente com sua derivada

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \text{donde segue que} \quad dx = L d\tilde{x}. \quad (2.6)$$

$$\tilde{t} = \frac{1}{\phi L} \int_0^t v(\xi) d\xi \quad \text{donde segue que} \quad dt = \frac{\phi L}{v} d\tilde{t}. \quad (2.7)$$

Substituindo as novas variáveis nas equações em (2.5), e usando (2.6) e (2.7), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}(s_i) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}(f_i) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.8)$$

Voltando a usar a notação  $t$  para  $\tilde{t}$  e  $x$  para  $\tilde{x}$ , temos o seguinte sistema de equações diferenciais parciais na forma de leis de conservação nas variáveis  $s_1$  e  $s_2$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(s_1) + \frac{\partial}{\partial x}(f_1) = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(s_2) + \frac{\partial}{\partial x}(f_2) = 0. \quad (2.10)$$

Como  $s_1 + s_2 = 1$  e  $f_1 + f_2 = 1$ , podemos então eliminar uma variável e uma equação em (2.9)-(2.10), ficando apenas com a conhecida equação de Buckley-Leverett

$$\frac{\partial}{\partial t}(s) + \frac{\partial}{\partial x}f(s) = 0 \quad (2.11)$$

onde  $s$  representa a saturação e  $f$ , a função de fluxo fracionário da fase molhante, remanescentes das equações (2.9)-(2.10).

As funções de fluxo fracionário das fases podem ser escritas em termos das propriedades do reservatório, como é mostrado a seguir. Substituindo a lei de Darcy em (2.4), para  $i = 1, 2$ , e reagrupando os termos obtemos

$$-A \frac{K}{\mu_i} k_{ri} \frac{\partial P_i}{\partial x} = -AK \left( \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{k_{r1}}{\mu_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x} \frac{k_{r2}}{\mu_2} \right) f_i. \quad (2.12)$$

Como estamos desprezando a pressão capilar, ou seja, estamos considerando que a pressão capilar seja nula, temos que  $\frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{\partial P_2}{\partial x}$ , daí, eliminando os termos comuns em (2.12), obtemos que

$$\frac{k_{ri}}{\mu_i} = \left( \frac{k_{r1}}{\mu_1} + \frac{k_{r2}}{\mu_2} \right) f_i. \quad (2.13)$$

Logo, a função de fluxo fracionário da fase  $i$ , pode também ser escrita como

$$f_i(s) = \frac{\frac{k_{ri}}{\mu_i}}{\frac{k_{r1}}{\mu_1} + \frac{k_{r2}}{\mu_2}}, i = 1, 2. \quad (2.14)$$

Agora, considere um volume infinitesimal de fluido que esteja num regime de reversão qualquer, com saturação da fase molhante dada por  $s$ . A permeabilidade relativa da fase não-molhante pode assumir todos os valores entre  $k_{r2}^D(s)$  e  $k_{r2}^E(s)$ , como mostra a Figura 2.1. Logo, para determinar o valor correto é necessário saber quantas reversões de regime ocorreram no reservatório e para quais valores de saturação essas reversões aconteceram. O valor da saturação onde ocorreu a primeira reversão é igual a  $s^D(\pi)$ , ou  $s^E(\pi)$  dependendo se a primeira reversão foi de drenagem para embebição ou vice-versa para algum valor de  $\pi$ . Suponha, então, que o regime inicial era de drenagem e que tenha havido 3 reversões. Logo, como ilustrado na Figura 2.2 a permeabilidade relativa da fase  $i$  para o valor de saturação da fase molhante  $s$ , é dada pela função  $k_{r2}^{DE}[3]$ , onde  $k_{r2}^{DE}[3]$  é a função de permeabilidade relativa de reversão para embebição, ocorrida em  $s[3]$ . Portanto, o regime atual do reservatório é embebição.

Na Figura 2.3 fica claro a necessidade de se determinar para qual saturação ocorreu a primeira reversão. Veja que considerando  $\pi_1 \neq \pi_2$ , ou seja tendo diferentes

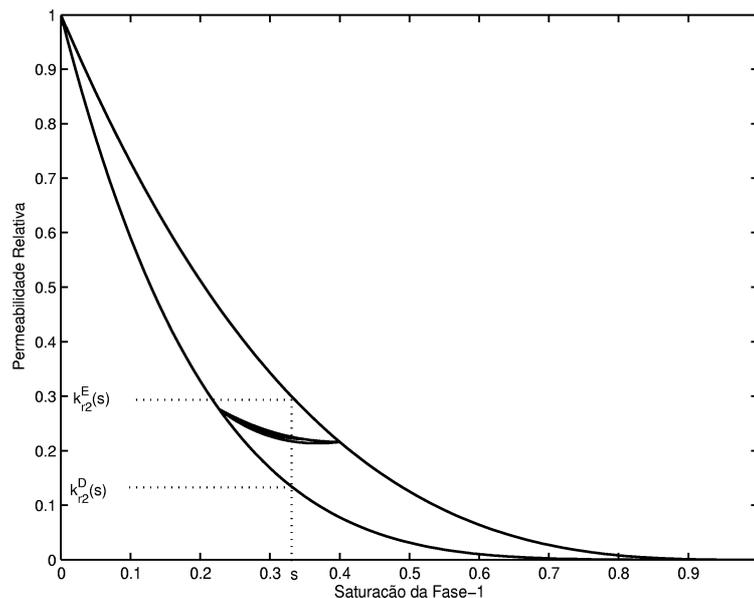


Figura 2.1: Curvas de Permeabilidade Relativa de Reversão.

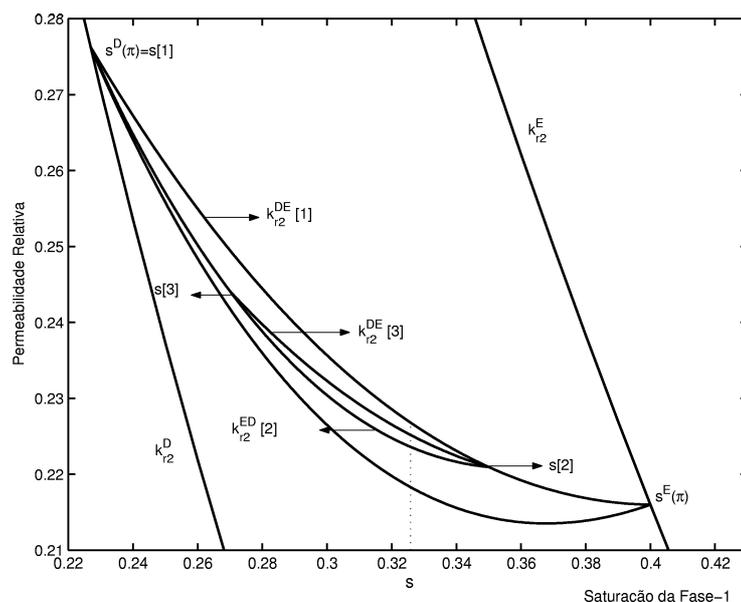


Figura 2.2: Curvas de Permeabilidade Relativa de Reversão.

valores para a saturação da primeira reversão o valor da permeabilidade relativa muda completamente, mesmo que consideremos que as demais reversões ocorreram para os mesmos valores de saturação.

Considerando que o regime atual seja embebição, como já foi observado na secção 1.3, as permeabilidades relativas das fases são dadas segundo as curvas  $k_{r_i}^{DE}$  [3], até que a saturação  $s[2]$  seja atingida, ou até que aconteça uma nova reversão. Se não ocorrer

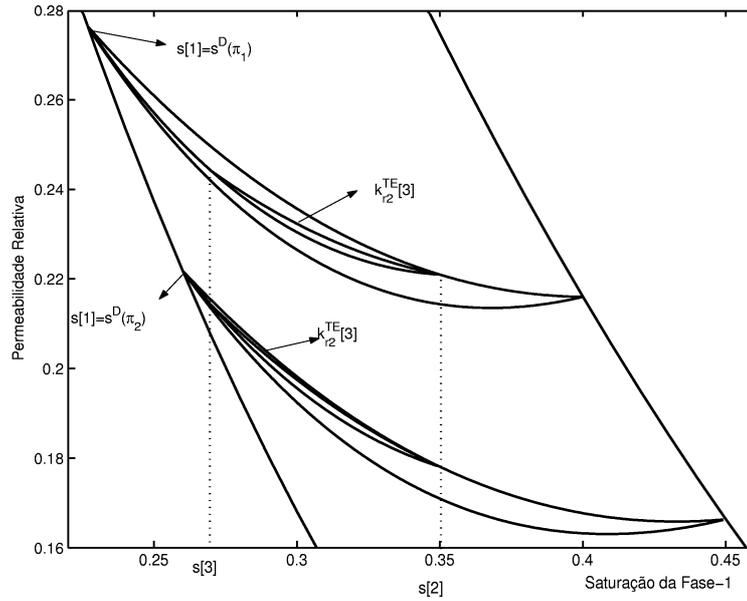


Figura 2.3: Curvas de Permeabilidade Relativa de Reversão.

nenhuma reversão então, as permeabilidades relativas das fases são dadas, a partir de  $s[2]$ , segundo as curvas  $k_{ri}^{DE}[2]$ ,  $i = 1, 2$  até a saturação  $s[1]$  ser atingida. Quando isto ocorrer, as permeabilidades relativas das fases passam a ser dadas, segundo as curvas  $k_{ri}^{DE}[1]$ ,  $i = 1, 2$  até a saturação  $s^E(\pi) = s[0]$  ser atingida. Durante este processo o valor de  $\pi$  não sofre nenhuma alteração. Ou seja, durante um regime de reversão temos  $\frac{\partial \pi}{\partial t} = 0$ , se a reversão for para drenagem, temos ainda que  $\frac{\partial s}{\partial t} < 0$ , analogamente, se a reversão for para embebição então  $\frac{\partial s}{\partial t} > 0$ .

Agora, suponha que a saturação  $s^E(\pi) = s[0]$  tenha sido atingida. Então, as permeabilidades relativas das fases são dadas, a partir de  $s^E(\pi) = s[0]$ , pelas respectivas curvas de embebição extremas, ou seja, por  $k_{ri}^E$ ,  $i = 1, 2$ , até que  $s$  atinja seu valor máximo, ou seja  $s = 1$ . No entanto, suponha que na saturação  $s^E(\tilde{\pi})$ , com  $s^E(\tilde{\pi}) > s^E(\pi)$ , aconteça outra reversão. Então a partir deste valor de saturação as permeabilidades relativas das fases serão dadas segundo as curvas  $k_{ri}^{ED}$ ,  $i = 1, 2$ , para um novo valor  $\tilde{\pi}$  do parâmetro de histerese. Observe que enquanto as permeabilidades relativas das fases seguem sobre as curvas de embebição extremas  $k_{ri}^E$ ,  $i = 1, 2$ , o valor de  $\pi$  mudou, diferentemente de quando o escoamento estava num regime de reversão, onde  $\pi$  é constante. De maneira análoga temos a descrição das permeabilidades no caso de o regime atual do escoamento ser de drenagem.

Sendo assim, se  $\pi = \pi^D(s)$  e a saturação da fase molhante,  $s$ , for decrescente com

o tempo, então o escoamento é regido pela curva de drenagem extrema. Analogamente, se  $\pi = \pi^E(s)$  e a saturação da fase molhante,  $s$ , for crescente com o tempo, então o escoamento é regido pela curva de embebição extrema. Portanto, o escoamento pode ser modelado matematicamente pela equação de Buckley-Leverett (2.11) juntamente com as restrições se o regime é de embebição ou de drenagem. Sendo assim, chegamos ao seguinte modelo

$$s_t + f(s, \pi)_x = 0 \quad (2.15)$$

$$\pi_t = 0, \text{ no interior de } \Omega, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \pi = \pi^D(s) \quad \text{e} \quad \frac{\partial s}{\partial t} < 0, & \quad \text{drenagem extrema,} \\ \pi = \pi^E(s) \quad \text{e} \quad \frac{\partial s}{\partial t} > 0, & \quad \text{embebição extrema.} \end{aligned}$$

# Capítulo 3

## O Problema de Riemann

Neste capítulo estudaremos o problema de valor inicial (2.15)-(2.16) com dado inicial:

$$(s, \pi)(x, 0) = \begin{cases} (s_L, \pi_L), & \text{se } x \leq 0 \\ (s_R, \pi_R), & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Um problema de valor inicial, PVI, com dado inicial do tipo (3.1), ou seja constante por partes, é denominado na literatura de problema de Riemann. O problema de Riemann associado ao sistema (3.1)-(3.2) pode representar matematicamente uma situação de recuperação de petróleo por injeção de água, se considerarmos a fase molhante como sendo água e a fase não-molhante como sendo óleo. As soluções deste problema de Riemann com dados iniciais arbitrários também são úteis na implementação de métodos numéricos de alta precisão, como o método de Godunov e o método de Glimm, por exemplo.

Devido às altas cifras que estão envolvidas na indústria de petróleo não é possível fazer testes em campo, por isso o desenvolvimento de métodos numéricos de alta precisão é muito importante. Com o uso destes métodos, é possível fazer projeções de produção e também decidir qual a técnica mais apropriada a ser aplicada num projeto de recuperação de petróleo.

### 3.1 A Função de Fluxo Extendida

Em vários trabalhos [18], [21] e [3], é feito uso de uma ferramenta de auxílio, a chamada **função de fluxo estendida**, para resolver problemas do tipo (2.15)-(2.16)-(3.1). Naqueles trabalhos, a função de fluxo  $\tau$ -estendida,  $f^\tau(s)$  é definida como:

$$f^\tau(s) = \begin{cases} f^D(s), & \text{se } 0 \leq s \leq s^D(\tau) \\ f^S(s, \tau), & \text{se } s^D \leq s \leq s^E \\ f^E(s), & \text{se } s^E \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

Ou seja, esta função é composta de uma porção de drenagem de  $s = 0$  até  $s^D(\tau)$ , seguida de uma porção de reversão entre  $s^D(\tau)$  e  $s^E(\tau)$ , e uma porção de embebição a partir de  $s^E(\tau)$  até  $s = 1$ . Neste trabalho, usaremos também esta ferramenta, entretanto, vamos acrescentar à função estendida o histórico das reversões de regimes.

Neste problema,  $s_L$  representa a saturação de injeção e  $s_R$  representa a saturação atual da fase molhante no reservatório, que estamos considerando que é homogênea.

Primeiro, vamos considerar que o regime inicial do reservatório seja drenagem e que não houve nenhuma reversão, ou seja, que a saturação da fase molhante seja decrescente. A partir do momento atual, se a saturação da fase molhante continuar decrescendo, ou seja, se o regime do reservatório não mudar, então as permeabilidades relativas das fases são dadas segundo as curvas de drenagem extremas,  $k_{ri}^D, i = 1, 2$ , como ilustrado na Figura 3.1.

No entanto, se a partir de  $s_R$  ocorrer uma reversão, então, para cada fase, uma curva de permeabilidade relativa de reversão para embebição,  $k_{ri}^{DE}[1], i = 1, 2$ , é gerada a partir de  $s_R = s[1]$ . Portanto, este valor de  $s_R$  é exatamente  $s^D(\pi_R)$ . As permeabilidades relativas das fases são, neste caso, dadas segundo a curva  $k_{ri}^{DE}[1], i = 1, 2$  com a saturação  $s$  variando de  $s_R = s[1] = s^D(\pi_R)$  até o valor  $s^E(\pi_R)$ , e a partir daí a permeabilidade é dada segundo a curva de embebição extrema  $k_{ri}^E, i = 1, 2$ , para  $s$  variando de  $s^E(\pi_R)$  até  $s = 1$ , como pode ser visto na Figura 3.1. Assim, a função de fluxo estendida é dada por (3.2) com  $\tau = \pi_R$ , e  $f^D(s)$ ,  $f^S(s, \tau)$  e  $f^E(s)$  dadas por

$$f^D(s) = \frac{k_{r1}^D}{k_{r1}^D + \mu k_{r2}^D}, \quad \text{para } 0 \leq s \leq s^D(\pi_R) \quad (3.3)$$

$$f^S(s, \tau) = \frac{k_{r1}^{DE}}{k_{r1}^{DE} + \mu k_{r2}^{DE}}, \quad \text{para } s^D(\pi_R) \leq s \leq s^E(\pi_R) \quad (3.4)$$

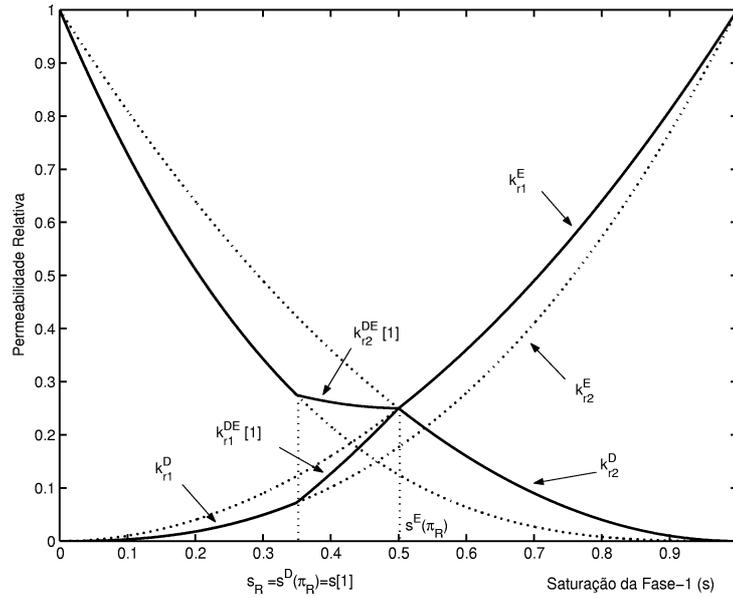


Figura 3.1: Curvas de Pemeabilidade Relativa.

$$f^E(s) = \frac{k_{r1}^E}{k_{r1}^E + \mu k_{r2}^E}, \quad \text{para } s^E(\pi_R) \leq s \leq 1 \quad (3.5)$$

onde  $\mu$  é a razão de viscosidade que é dada por  $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ . O gráfico da função de fluxo estendida, para este caso, é exibido na Figura 3.2.

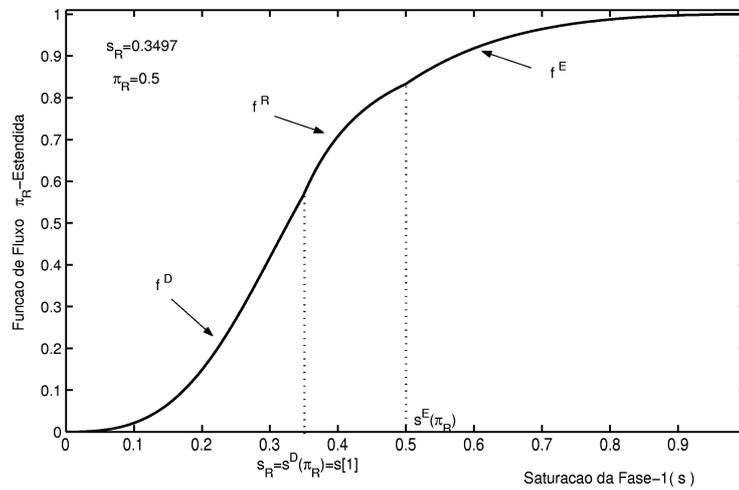


Figura 3.2: Função de Fluxo Estendida.

Suponha, agora, uma outra situação em que o regime também se inicie por drenagem, que tenha ocorrido apenas uma reversão, na saturação  $s[1] = s^D(\pi_R)$ , e a saturação atual da fase molhante seja  $s_R$ , como pode ser visto na Figura 3.3. O regime atual no reservatório é embebição. Como no caso em que não tínhamos reversões, existem duas possibilidades: ou a saturação da fase molhante, a partir do momento atual

continua crescente, ou ocorre uma reversão em  $s_R = s[2]$ .

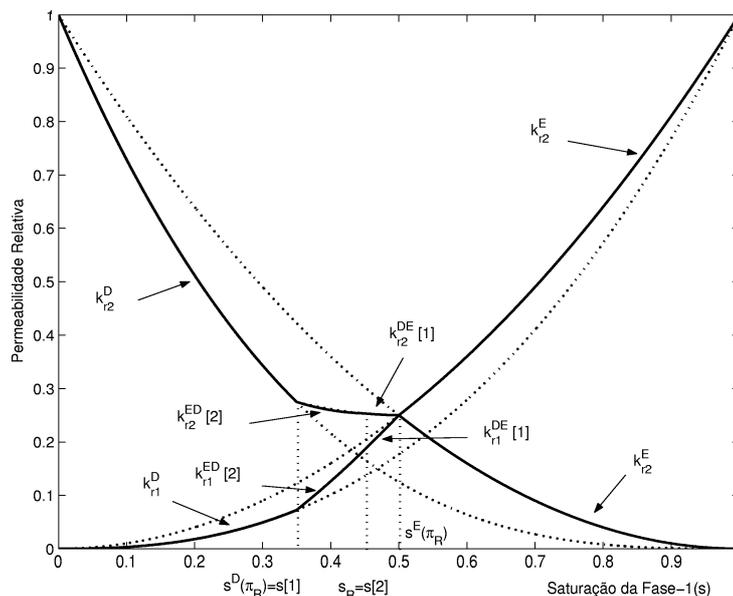


Figura 3.3: Função de Fluxo Estendida sem Reversão.

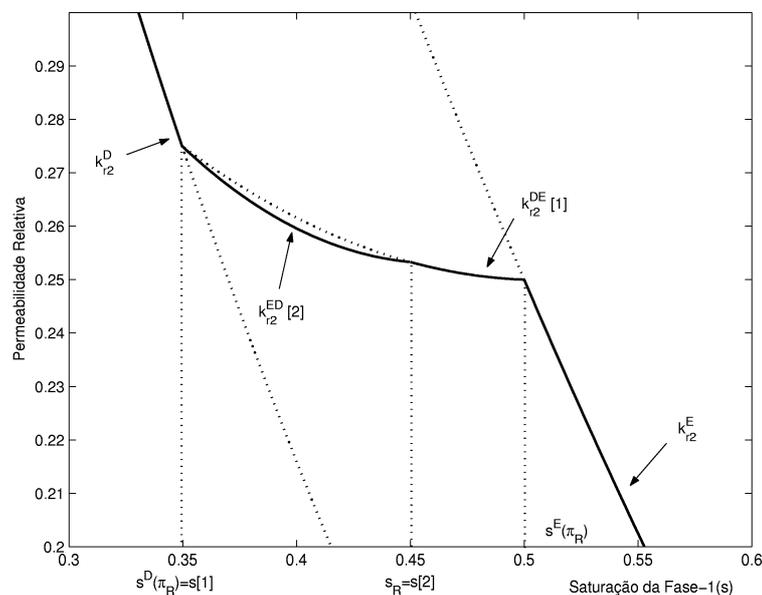


Figura 3.4: Função de Fluxo Estendida com uma Reversão.

Caso a saturação da fase molhante continue crescente, então as permeabilidades relativas das fase são dadas segundo as curvas  $k_{ri}^{DE}[1], i = 1, 2$  até que a saturação  $s^E(\pi_R)$  seja atingida. Isto pode ser observado na Figura 3.3 e na Figura 3.4 que é uma ampliação de parte da Figura 3.3, para a fase não-molhante. A partir da saturação  $s^E(\pi_R)$ , as permeabilidades relativas das fases segundo são dadas pelas curvas

de embebição extremas,  $k_{ri}^E, i = 1, 2$ , até que  $s$  atinja o valor máximo  $s = 1$ . Caso aconteça a reversão em  $s_R = s[2]$ , então as permeabilidades relativas das fases são dadas segundo as curvas de permeabilidade relativa de reversão para drenagem,  $k_{ri}^{ED}[2], i = 1, 2$  que são geradas a partir de  $s_R = s[2]$  e que estão definidas para  $s$  decrescendo  $s^D(\pi_R) = s[1]$  até  $s = s_R = s[2]$ . A partir de  $s = s[1]$  a permeabilidade passa a ser dada pela curva de drenagem extrema,  $k_{ri}^D, i = 1, 2$ , para  $s$  decrescendo de  $s[1]$  até  $s = 0$ . Neste caso, a função de fluxo estendida é dada por (3.2) com  $\tau = \pi_R$ ,  $f^D$  dada por (3.3),  $f^E$  dada por (3.5) e  $f^S(s, \tau)$  dada por

$$f^S(s) = \begin{cases} f^{S1}(s) = \frac{k_{r1}^{ED}[2]}{k_{r1}^{ED}[2] + \mu k_{r2}^{ED}[2]}, & \text{para } s^D = s[1] \leq s \leq s_R = s[2] \\ f^{S2}(s) = \frac{k_{r1}^{DE}[1]}{k_{r1}^{DE}[1] + \mu k_{r1}^{DE}[1]} & \text{para } s_R = s[2] \leq s \leq s^E(\pi_R) \end{cases} \quad (3.6)$$

Observe que  $f^S$  é definida por duas expressões, uma para  $s^D(\pi_R) < s < s_R$ ,  $f^{S1}$ , e a outra para  $s_R < s < s^E(\pi_R)$ ,  $f^{S2}$ . A primeira está associada à curva  $k_{ri}^{ED}[2]$  e a segunda à curva  $k_{ri}^{DE}[1]$ .

O gráfico da função de fluxo estendida para este caso está exibido na Figura 3.5.

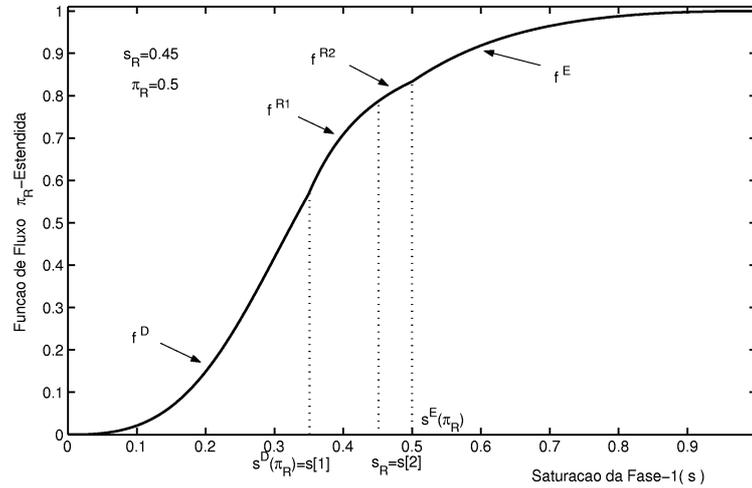


Figura 3.5: Função de Fluxo Estendida com uma Reversão.

O mesmo procedimento que fizemos, para o caso em que consideramos que houve uma reversão, pode ser feito para um número finito de reversões apenas aumentando o número de partes provenientes das curvas de permeabilidade relativa de reversão e as “quinas” no gráfico da função de fluxo estendida. Cada “quina” corresponde a um

valor de saturação onde houve uma reversão. Com isto, a solução do problema de Riemann também terá a mesma construção, sendo que existirão mais possibilidades para as seqüências de ondas qu irão compor a solução.

Na Figura 3.6 temos exibidas para um mesmo valor fixo de  $\tau = \pi_R = 0.5$ , as funções de fluxo estendidas para o modelo considerando as curvas de reversão não coincidentes e a histerese apenas na fase não-molhante, tracejado, e para os modelo apresentado em [18], no qual não se considerava a irreversibilidade das curvas de reversão e a histerese estava presente apenas na fase não molhante, linha contínua.

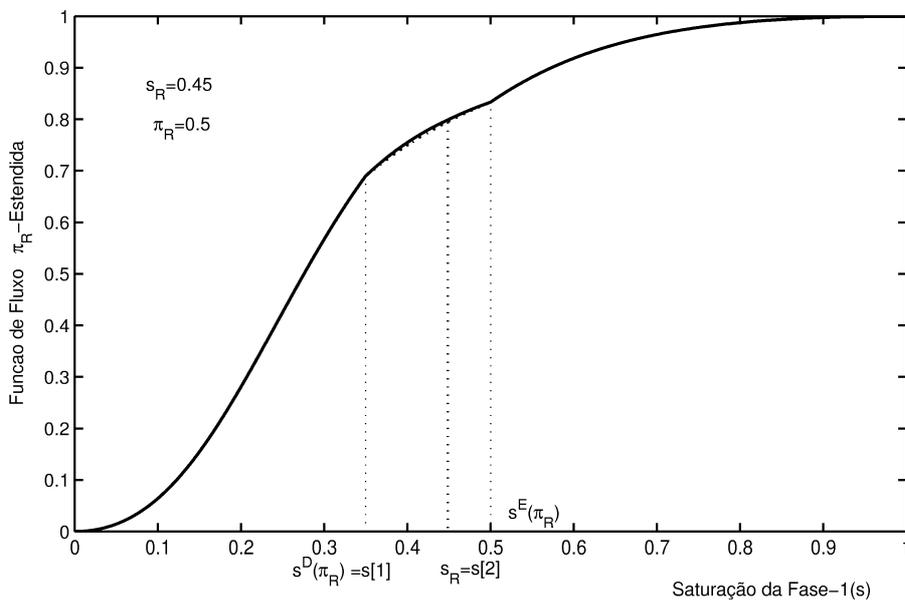


Figura 3.6: Função de Fluxo Estendida para os dois Modelos.

Como pode ser observado na Figura 3.7, que é uma ampliação de parte da Figura 3.6, existe uma diferença significativa entre os gráficos das duas funções de fluxo estendidas, conseqüentemente há diferenças nas soluções do problema de Riemann quando utilizamos um modelo ou o outro, como será mostrado na próxima seção.

## 3.2 Solução do Problema de Riemann

Apresentaremos as possíveis soluções para o problema de Riemann considerando que o escoamento tenha iniciado por drenagem e já tenha passado por uma reversão na saturação  $s[1] = s^D(\pi_R)$ . Estaremos fazendo esta consideração devido ao fato de que, se considerarmos mais reversões a solução do problema de Riemann segue o mesmo

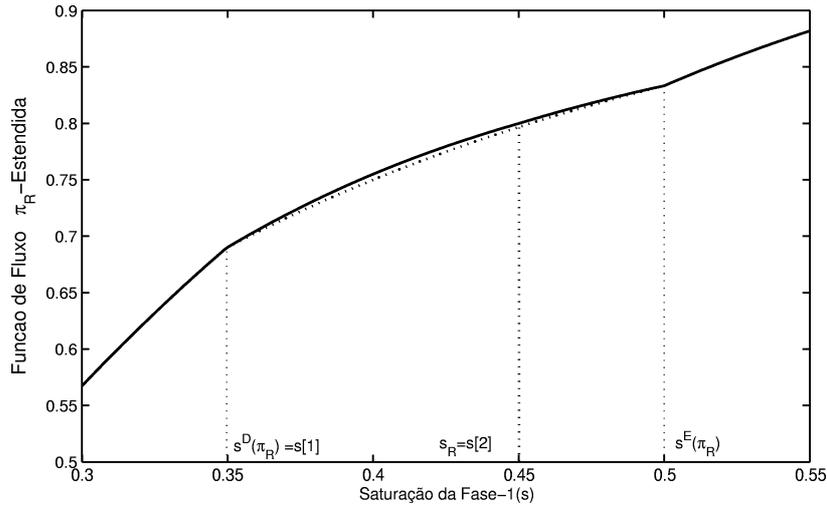


Figura 3.7: Função de Fluxo Estendida para os dois Modelos.

procedimento, entretanto a construção do fecho convexo do gráfico da função de fluxo estendida será mais tediosa, com mais casos a considerar. Pelo mesmo motivo estamos considerando apenas o caso em que o gráfico da função de fluxo estendida não contém os pontos de inflexão dos gráficos das funções  $f^D$  e  $f^E$ .

Fixado  $(s_R, \pi_R)$ , a solução será descrita em termos dos possíveis valores de saturações  $s_L$ , e também de  $\pi_L$ . A posição do estado  $(s_R, \pi_R)$  no gráfico da função de fluxo é representada por R. Analogamente, a posição do estado  $(s_L, \pi_L)$  no mesmo gráfico é representada por L. Na Figura 3.8 temos exibidas possíveis posições de L neste gráfico.

Quando L não está sobre o gráfico da função de fluxo estendida, a solução tem início por um choque de velocidade zero, [18], do ponto  $(s_L, \pi_L)$  até o ponto  $(s_M, \pi_M)$ , com  $\pi_L \neq \pi_M$ . Este choque é obtido considerando-se a relação de Rankine-Hugoniot (A.7) para as equações (2.15)-(2.16), ou seja,

$$\begin{cases} \sigma(s_M - s_L) = f(s_M) - f(s_L), \\ \sigma(\pi_M - \pi_L) = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Da segunda equação temos que ou  $\sigma = 0$  ou  $\pi_M = \pi_L$ . Como a solução do problema de Riemann tem que iniciar com a onda de menor velocidade começamos com  $\sigma = 0$ . Daí, da primeira equação temos que  $f(s_M, \pi_M) = f(s_L, \pi_L)$ , ou seja, no plano  $s - f$  as alturas  $f(s_M, \pi_M)$  e  $f(s_L, \pi_L)$  são as mesmas. Portanto, esta onda de

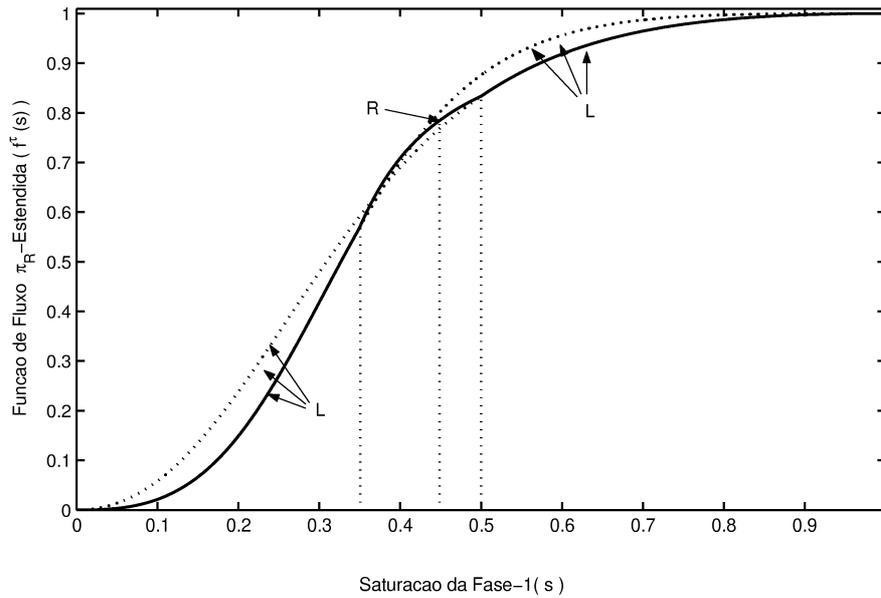


Figura 3.8: Possíveis Posições para o Estado L.

velocidade zero é representada no espaço  $s-f$  como uma reta horizontal que passa pelos pontos  $(s_M, f(s_M))$  e  $(s_L, f(s_L))$ . A partir de  $(s_M, \pi_M)$ , devemos considerar as ondas com velocidade positiva. Estas ondas são obtidas resolvendo-se a equação de Buckley-Leverett com a função de fluxo dada pela função estendida,  $f^{\pi_R}$ , porque o gráfico de  $f^{\pi_R}$  contém o ponto  $(s_R, f^{\pi_R}(s_R))$ . Assim, o ponto  $(s_M, f^{\pi_R}(s_M))$  é dado geometricamente pela interseção da reta horizontal que passa por L com o gráfico da função de fluxo estendida,  $f^{\pi_R}$ . Dado que a função  $f^{\pi_R}$  é monótona crescente, esta interseção existe e é única. Portanto vamos descrever a solução do problema de Riemann considerando que o estado  $L = (s_L, \pi_L)$  esteja sobre o gráfico da função de fluxo estendida,  $f^{\pi_R}$ .

Uma vez construído o gráfico da função de fluxo  $\pi_R$ -estendida, a solução do problema de Riemann é determinada utilizando o método do fecho convexo de Oleinik, [16]. Tal método consiste na construção de fechos convexos da região abaixo do gráfico da função de fluxo estendida, para  $s$  entre  $s_L$  e  $s_R$ , [9]. Usaremos a notação  $(f^{\pi_R})'$  para representar a derivada da função estendida, com relação à  $s$ .

Devemos considerar dois casos: o primeiro em que  $s_L < s_R$  e o segundo em que  $s_L > s_R$ .

- Caso 1:  $s_L < s_R$ . Para este caso, temos ainda dois subcasos a considerar:

- Caso 1a:  $s_L < s^{1*}$ , Figura 3.9, onde a saturação  $s^{1*}$  é obtida resolvendo-se

a equação

$$(f^{\pi_R})'(s^{1*}) = \frac{f^{\pi_R}(s_R) - f^{\pi_R}(s^{1*})}{s_R - s^{1*}} \quad (3.8)$$

A solução é dada por uma rarefação de  $s_L$  até  $s^{1*}$  adjacente à um choque de  $s^{1*}$  para  $s_R$ , caracterizando uma onda composta. Neste caso, observamos que  $s^{1*}$  é igual a  $s^D(\pi_R)$ . A solução tem, portanto, a seguinte expressão

$$(s, \pi)(x, t) = \begin{cases} (s_L, \pi_L), & \text{se } \frac{x}{t} < (f^{\pi_R})'(s_L), \\ (s_1, \pi_1)(\xi), & \text{se } (f^{\pi_R})'(s_L) \leq \frac{x}{t} \leq (f^{\pi_R})'(s_R) = \sigma, \\ (s_R, \pi_R), & \text{se } \frac{x}{t} > (f^{\pi_R})'(s_R) = \sigma. \end{cases} \quad (3.9)$$

onde  $\sigma$  é a velocidade do choque de  $s^{1*}$  para  $s_R$  e é dada pela relação de Rankine-Hugoniot (A.7)

$$f^{\pi_R}(s_R) - f^{\pi_R}(s^{1*}) = \sigma(s_R - s^{1*}). \quad (3.10)$$

A função  $s_1(\xi)$  é obtida implicitamente da equação  $(f^{\pi_R})'(s_1) = \xi$ , para  $s$  entre  $s^{1*}$  e  $s_L$ , onde  $\xi$  é a razão  $x/t$ . A função  $\pi_1(\xi)$  é obtida implicitamente da equação  $\pi_1(\xi) = \pi^D(s_1(\xi))$ , uma vez que a rarefação está sobre a curva de drenagem extrema.

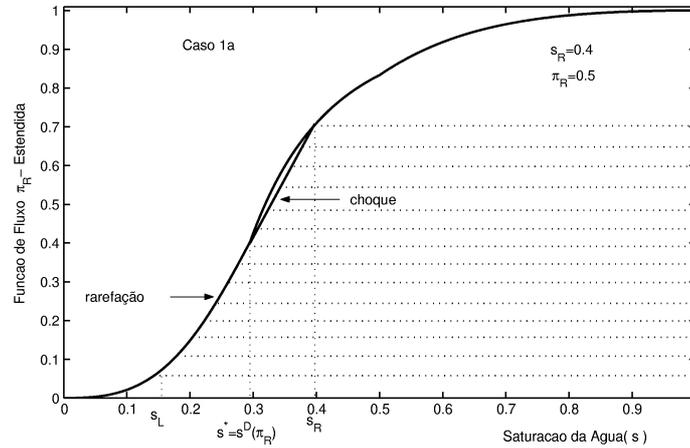


Figura 3.9: Função de Fluxo Estendida.

- Caso 1b:  $s_L \leq s^{1*}$ , Figura 3.10. Neste caso, a solução é dada por um choque simples de  $s_L$  para  $s_R$ , cuja expressão é

$$(s, \pi)(x, t) = \begin{cases} (s_L, \pi_L), & \text{se } \frac{x}{t} < \sigma, \\ (s_R, \pi_R), & \text{se } \frac{x}{t} > \sigma. \end{cases} \quad (3.11)$$

onde  $\sigma$  é a velocidade do choque de  $s_L$  para  $s_R$  e é dada pela relação de Rankine-Hugoniot (A.7):

$$f^{\pi_R}(s_R) - f^{\pi_R}(s_L) = \sigma(s_R - s_L) \quad (3.12)$$

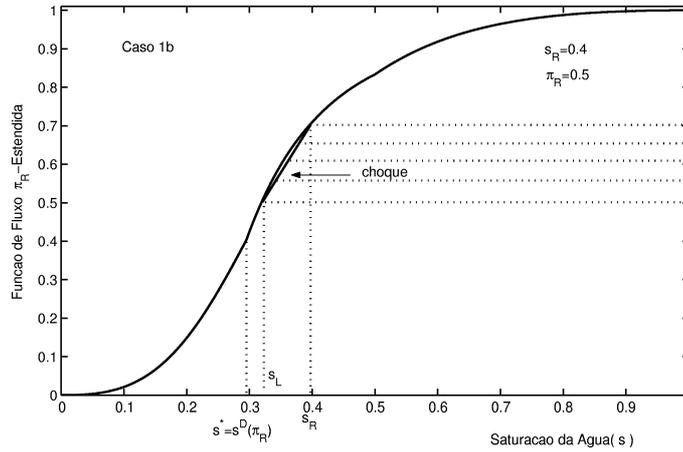


Figura 3.10: Função de Fluxo Estendida.

- Caso 2:  $s_L > s_R$ . Temos três subcasos a considerar:
  - Caso 2a:  $s_L \leq s^E(\pi_R)$ , Figura 3.11. Neste caso, a solução é uma rarefação simples de  $s_L$  para  $s_R$ , cuja expressão é

$$(s, \pi)(x, t) = \begin{cases} (s_L, \pi_L), & \text{se } \frac{x}{t} < (f^{\pi_R})'(s_L), \\ (s_1, \pi_1)(\xi), & \text{se } (f^{\pi_R})'(s_L) \leq \frac{x}{t} \leq (f^{\pi_R})'(s_R), \\ (s_R, \pi_R), & \text{se } \frac{x}{t} > (f^{\pi_R})'(s_R). \end{cases} \quad (3.13)$$

onde  $s_1(\xi)$  é obtida implicitamente da equação  $(f^{\pi_R})'(s_1) = \xi$  para  $s$  entre  $s^E(\pi_R)$  e  $s_R$ . Como o ponto  $(s_L, f^{\pi_R}(s_L))$  está sobre a porção de reversão do gráfico de  $f^{\pi_R}$  temos obrigatoriamente que  $\pi_L = \pi_R$ , pois  $\pi$  é constante ao longo das curvas de reversão. Portanto,  $\pi_1(\xi) = \pi_R$ .

- Caso 2b: Se  $s_L > s^E(\pi_R)$ , Figuras 3.12 e 3.15. Seja  $s^{2*}$  definida pela equação

$$(f^{\pi_R})'(s^{2*}) = \frac{f^{\pi_R}(s_L) - f^{\pi_R}(s^{2*})}{s_L - s^{2*}}. \quad (3.14)$$

Note que, para cada valor  $s_L$  temos associado um valor de  $s^{2*}$ . Quanto maior for  $s_L$ , o valor  $s^{2*}$  estará mais próximo de  $s_R$ , até que para um determinado

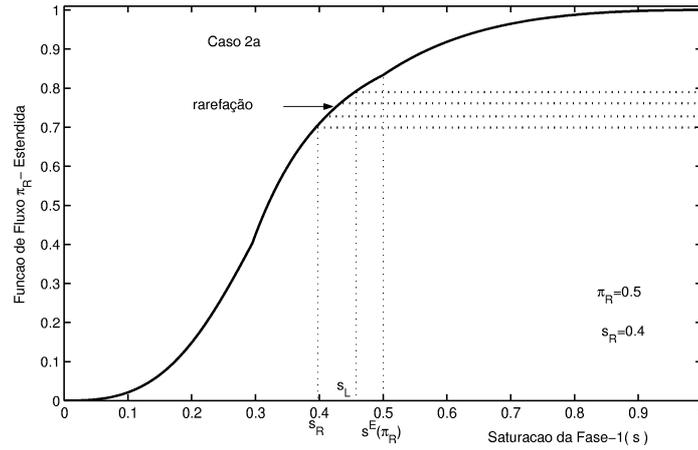


Figura 3.11: Função de Fluxo Estendida.

valor de  $s_L = s^{3*}$  o valor de  $s^{2*}$  atinge um mínimo denotado por  $s^{4*}$ . Assim, se  $s^E(\pi_R) < s_L \leq s^{3*}$ , Figuras 3.12 e 3.13, a solução é dada por um choque de  $s_L$  até a saturação  $s^{2*}$ , seguida por uma rarefação de  $s^{2*}$  até  $s_R$ .

$$(s, \pi)(x, t) = \begin{cases} (s_L, \pi_L), & \text{se } \frac{x}{t} < \sigma^*, \\ (s_1, \pi_1)(\xi), & \text{se } \sigma^* = (f^{\pi_R})'(s^{2*}) \leq \frac{x}{t} \leq (f^{\pi_R})'(s_R), \\ (s_R, \pi_R), & \text{se } \frac{x}{t} > (f^{\pi_R})'(s_R). \end{cases} \quad (3.15)$$

onde  $\sigma^*$  é dada pela relação de Rankine-Hugoniot, (A.7):

$$f^{\pi_R}(s_L) - f^{\pi_R}(s^{2*}) = \sigma(s_L - s^{2*}). \quad (3.16)$$

A função  $s_1(\xi)$  é dada implicitamente pela relação  $(f^{\pi_R})'(s_1) = \xi$  para  $s$  entre  $s^{2*}$  e  $s_R$ , e  $\pi_1(\xi) = \pi_R$ , uma vez que a rarefação está sobre a porção de reversão do gráfico da função de fluxo estendida, na qual  $\pi$  é constante e igual a  $\pi_R$ .

- Caso 2c: Se  $s_L \geq s^{3*}$ , Figuras 3.15 e 3.14. Considere os valores  $s^{3*}$  e  $s^{4*}$  definidos no Caso 2b. A solução é dada por uma rarefação de  $s_L$  até  $s^{3*}$ , seguida por um choque de  $s^{3*}$  até  $s^{4*}$ , seguido por uma rarefação de  $s^{4*}$  até

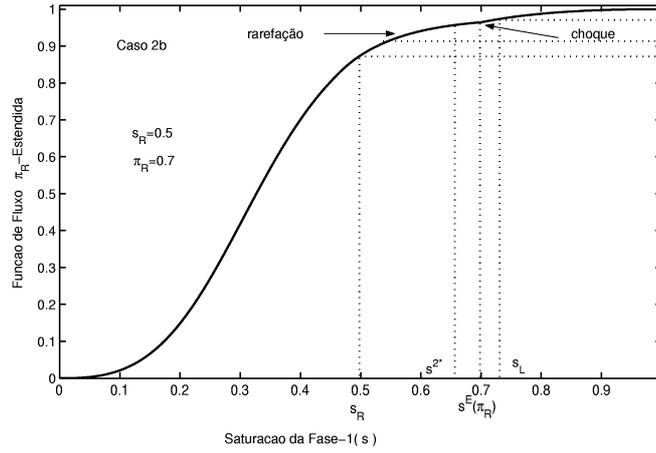


Figura 3.12: Função de Fluxo Estendida.

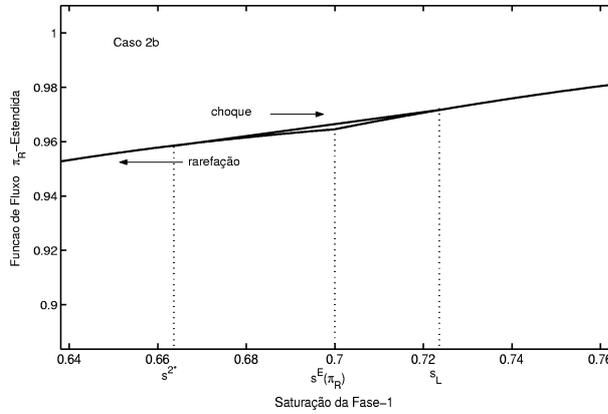


Figura 3.13: Função de Fluxo Estendida.

$s_R$ . A expressão para esta solução é

$$(s, \pi)(x, t) = \begin{cases} (s_L, \pi_L), & \text{se } \frac{x}{t} < (f^{\pi_R})'(s_L), \\ (s_1, \pi_1)(\xi), & \text{se } (f^{\pi_R})'(s_L) \leq \frac{x}{t} \leq (f^{\pi_R})'(s^{3*}) = \sigma_1 = (f^{\pi_R})'(s^{4*}), \\ (s_2, \pi_2)(\xi), & \text{se } (f^{\pi_R})'(s^{4*}) \leq \frac{x}{t} \leq (f^{\pi_R})'(s_R), \\ (s_R, \pi_R), & \text{se } \frac{x}{t} > (f^{\pi_R})'(s_R). \end{cases} \quad (3.17)$$

onde  $s_1(\xi)$  é obtida implicitamente da equação  $(f^{\pi_R})'(s_1) = \xi$  para  $s$  entre  $s_L$  e  $s^{3*}$ , e  $\pi_1(\xi)$  é obtida implicitamente da equação  $\pi_1(\xi) = \pi^E(s_1(\xi))$ , uma vez que este segmento de rarefacção corresponde a pontos sobre a curva de embebebição extrema. Analogamente,  $s_2(\xi)$  é obtida implicitamente da equação  $(f^{\pi_R})'(s_2) = \xi$ , para  $s$  entre  $s^{4*}$  e  $s_R$  e como este segmento da rarefação corresponde à porção de reversão do gráfico de  $f^{\pi_R}$  temos que

$$\pi_2(\xi) = \pi_R.$$

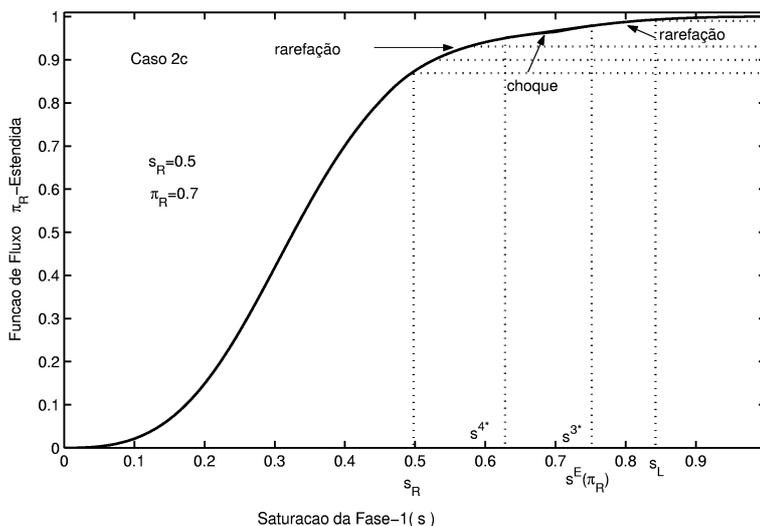


Figura 3.14: Função de Fluxo Estendida.

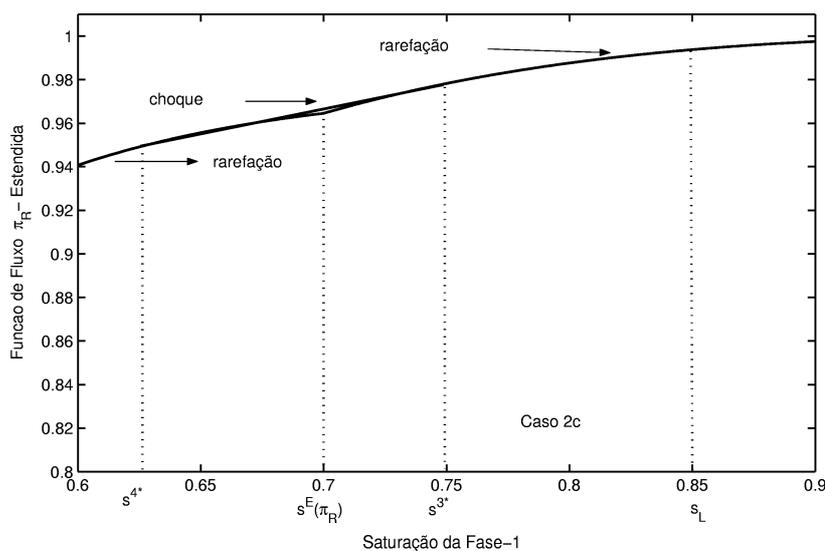


Figura 3.15: Função de Fluxo Estendida.

Observe na Figura 3.16 que para  $s_L < s_R$  se considerarmos o modelo apresentado em [18], onde a histerese foi admitida apenas na fase não-molhante e as curvas de reversão eram coincidentes, a solução é dada apenas por um choque de  $(s_L, \pi_L)$  à  $(s_R, \pi_R)$ . Entretanto se considerarmos o modelo apresentado neste trabalho, a solução consiste de uma rarefação de  $(s_L, \pi_L)$  à  $(s^*, \pi^*)$  seguida de um choque de  $(s^*, \pi^*)$  à  $(s_R, \pi_R)$ . Nesta segunda solução a onda de rarefação corresponde à porção de drenagem

extrema do gráfico de  $f^{\pi_R}$ , enquanto a onda de choque corresponde à secante ao gráfico de  $f^{\pi_R}$  na porção de reversão pelos pontos  $(s^*, f^{\pi_R}(s^*))$  e  $(s_R, f^{\pi_R}(s_R))$ , e portanto  $\pi^* = \pi_R$ .

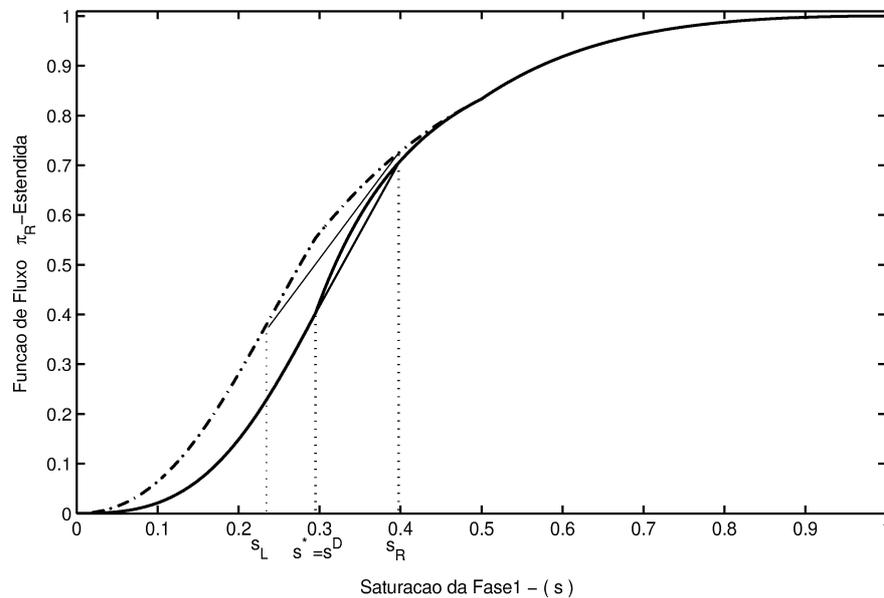


Figura 3.16: Função de Fluxo Estendida.

# Capítulo 4

## Conclusões

Apresentamos neste trabalho um modelo matemático para o escoamento bifásico unidimensional. Tal modelo considera os efeitos do fenômeno de histerese nas duas fases do fluido e que curvas de reversão para embebição e para drenagem são não coincidentes.

No Capítulo 1 fizemos a dedução do modelo matemático, e concluímos que a principal mudança que ocorre no modelo é na função de fluxo fracionário. Isto ocorre devido ao fato de que, tanto para a fase molhante quanto para a fase não-molhante, a permeabilidade relativa das fases depende do regime do escoamento. Além disso, depende também de quantas reversões de regime houveram.

Determinamos a solução do problema de Riemann considerando ter havido uma reversão de regime. A construção da solução para mais reversões segue o mesmo procedimento, entretanto, com mais subcasos a se considerar nas sequências de ondas. Além disso, ficou claro que com os mesmos dados iniciais a solução do problema de Riemann associado ao modelo apresentado aqui é diferente da solução do modelo apresentado em [18]. Como consequência, teremos previsões distintas ao usarmos um simulador numérico baseado num modelo ou no outro. Como apresentamos a solução do problema de Riemann para o modelo que está em maior concordância com os dados experimentais acreditamos que este seja mais apropriado.

# Bibliografia

- [1] Anderson, W., G., *Wettability Literature Survey - Part 5: The Effects of Wettability on Relative Permeability*. SPE Journal, pp. 1453-1468, Novembro (1987).
- [2] Bedrikovetsky, P., Marchesin, Ballin, P., *Hysteresis in Flow in Porous Media with Phase Transitions*. SPE Journal, pp. 508-520, Dezembro (1980).
- [3] Bedrikovetsky, P., Marchesin, Ballin, P., *Mathematical Theory for Two Phase Displacement with Hysteresis (with Applications to WAG Injection)*. V European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, Setembro (1996).
- [4] Bedrikovetsky, P. *Mathematical Theory of Oil and Gas Recovery with Applications to ex-USSR Oil and Gas Fields*. Kluwer Academic Publishers, Holanda (1993).
- [5] Braun, E. M., Holland, R. F., *Relative Permeability Hysteresis: Laboratory Measurements and a Conceptual Model*. SPE Reservoir Engineering, pp.222-228, Agosto (1997).
- [6] Colonna, J., Brissaud, F., e Millet, J. L., *Evolution of Capillary and Relative Permeability Hysteresis*. SPE Journal, pp. 28-38, Fevereiro (1972).
- [7] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, (1998).
- [8] Furati, K., *The Solution of the Riemann Problem for a Hyperbolic System Modeling Polymer Flooding with Hysteresis*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, pp. 205-233, (1997).
- [9] Furati, K., *Effects of Relative Permeability History Dependence on Two-Phase Flow in Porous Media*. Transport in Porous Media, pp. 181-203, Junho (1997).

- [10] Gladfelter, R. E., Gupta, S., P., *Effect of Fractional Flow Hysteresis on Recovery of Tertiary Oil*. SPE Journal, pp. 508-520, Dezembro (1980).
- [11] Guo, Y., *Importance of Capillary Hysteresis on Coreflood Experiments*. VIII European Symposium on Improved Oil Recovery, Vol. I, pp. 10-17, Maio (1995).
- [12] Killough, J., E., *Reservoir Simulation with History-Dependent Saturation Functions*. SPE Journal, pp. 37-48, Fevereiro (1976).
- [13] Kjosavik, A., Ringen, J. K., Skjaeveland, S., M., *Relative Permeability Correlation for Mixed-Wet Reservoirs*. SPE Journal, pp. 49-58, Março (2002).
- [14] Land, C., S., *Calculation of Imbibition Relative Permeability for Two- and Three-Phase Flow from Rock Properties*. SPE Journal, pp. 149-156, Junho (1968).
- [15] Lenhard, R., J., Parker, J., C., *A Model for Hysteretic Constitutive Relations Governing Multiphase Flow; 2. Permeability-Saturation Relations*. Water Resources Research, pp 2197-2206, Dezembro (1997).
- [16] LeVeque, R., *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhauser Verlag, Berlin (1992).
- [17] Marchesin, D., Medeiros, H. B., Paes-Leme, P. J., *A Model for Two-Phase Flow with Hysteresis*. Matemática Contemporânea, vol. 60, pp. 89-107, (1987).
- [18] Plohr, B., Marchesin, D., Bedrikovetsky, P., Krause, P., *Modeling Hysteresis in Porous Media Flow Via Relaxation*. Computational Geosciences, pp 225-256, Junho (2001).
- [19] Rosa, A. J., Carvalho, R. S., Xavier, J. A. D., *Engenharia de Reservatórios de Petróleo*. Universidade Corporativa / Núcleo Bahia, vol. I, (2001).
- [20] Smoller, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer-Verlag, New York (1994).
- [21] Souza, A. J., Marchesin, D., Bedrikovetsk, P., Krause, P., *A Simple Model for Three Phase Flow with Hysteresis*. Matemática Contemporânea (2000) submitted.
- [22] Thomas, J. E., et al , *Fundamentos de Engenharia de Petróleo*. Interciência, Rio de Janeiro, (2001).

- [23] Van Kats, F. M., Van Duijn, C. J., *A Mathematical Model for Hysteretic Two-Phase Flow in Porous Media*. *Transport in Porous Media*, pp. 239-263, (2001).
- [24] Visitin, A., *Differential Systems with Hysteresis*. Springer (1995).

# Apêndice A

## Apêndice: Soluções de Problemas de Riemann em Geral

Para tornar este trabalho auto suficiente, estamos introduzindo este apêndice que trata sobre a solução de problemas de Riemann associados a leis de conservação escalares e que é baseado nos livros [16], [20], [7]. Uma lei de conservação escalar em uma dimensão espacial é uma equação diferencial parcial com uma estrutura particularmente simples. Na sua forma adimensional, a equação é escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}f(u(x, t)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (\text{A.1})$$

onde  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma variável de estado, como massa, momentum e energia e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a chamada função de fluxo.

O problema de Riemann para a equação (A.1) consiste de um problema de valor inicial cujo dado inicial seja constante por partes, ou seja, da forma:

$$u(x, 0) \begin{cases} u_L, & \text{se } x \leq 0 \\ u_R, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

### A.1 Tipos de Solução

Para resolver o problema de Riemann (A.1)-(A.2), procuraremos soluções na classe das funções seccionalmente contínuas e que dependem da razão  $\frac{x}{t}$ , ou seja,

$$u(x, t) = U(\xi). \quad (\text{A.3})$$

$$\xi = \frac{x}{t}. \quad (\text{A.4})$$

As soluções do problema de Riemann (A.1)-(A.2) são compostas de estados constantes, ondas de choques conectando estados constantes e ondas de rarefações conectando estados constantes. Em verdade, a solução depende diretamente da natureza da função de fluxo. Quando a função de fluxo é convexa,  $f''(u) > 0$ , ou côncava  $f''(u) < 0$ , a solução é sempre um choque ou uma rarefação simples. Caso a função não seja nem convexa nem côncava, a solução pode ainda ser uma composição de rarefação-choque.

Vamos apresentar aqui a solução da equação de Buckley-Leverett, com função de fluxo dada por  $f(u) = \frac{u^2}{u^2 + (1-u)^2}$ , cujo gráfico é mostrado na Figura A.1. Como pode ser visto na Figura A.2, onde temos o gráfico da segunda derivada da função de fluxo, esta função de fluxo não é nem convexa nem côncava.

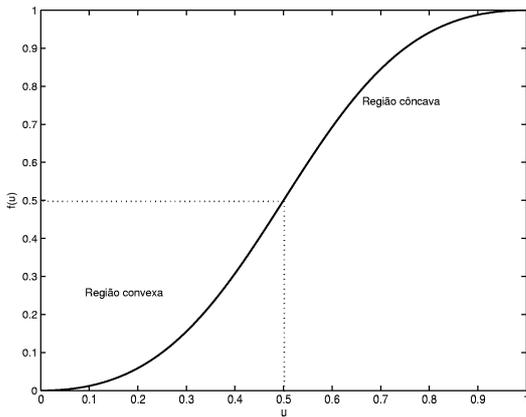


Figura A.1: Função de Fluxo Fracionário

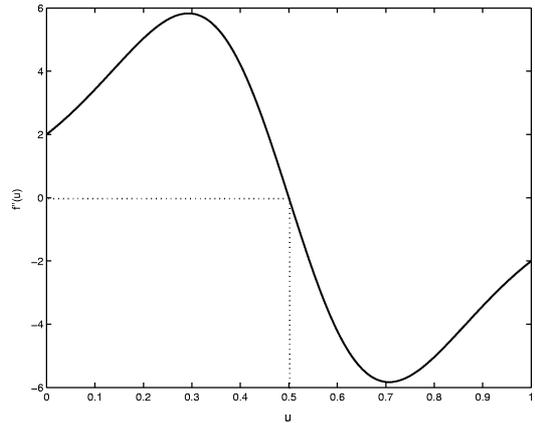


Figura A.2: Derivada Segunda da Função de Fluxo Fracionário

*Rarefação Simples:* Uma rarefação é uma solução do tipo:

$$u(x, t) \begin{cases} u_L, & \text{se } \frac{x}{t} \leq \xi_L \\ U(\xi), & \text{se } \xi_L < \frac{x}{t} < \xi_R \\ u_R, & \text{se } \frac{x}{t} > \xi_R \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

onde  $U(\xi)$  é uma função suave com  $U(\xi_L) = u_L$  e  $U(\xi_R) = u_R$ .

Uma solução por rarefação só é possível se  $f'(u)$  for crescente de  $u_L$  para  $u_R$ , [16], [20], [7]. Com isto, substituindo  $U(\xi)$  na equação (A.1), obtemos que  $U(\xi)$  deve ser solução da equação algébrica não-linear  $f'(U(\xi))$ , a qual existe pelo Teorema da Função Inversa. Para uma função convexa isto é o mesmo que dizer que  $u_L < u_R$ . Por

outro lado, se a função de fluxo for côncava, uma rarefação conectando os estados  $u_L$  e  $u_R$  só é possível se  $u_L > u_R$ .

Nas Figuras A.3 e A.4 temos o exemplo de duas soluções por rarefação. Na primeira,  $(u_L = 0.1, f(u_L))$  e  $(u_R = 0.5, f(u_R))$ , estão na região de convexidade. Na segunda  $(u_L = 0.9, f(u_L))$  e  $(u_R = 0.5, f(u_R))$  estão na região de concavidade do gráfico de  $f$ .

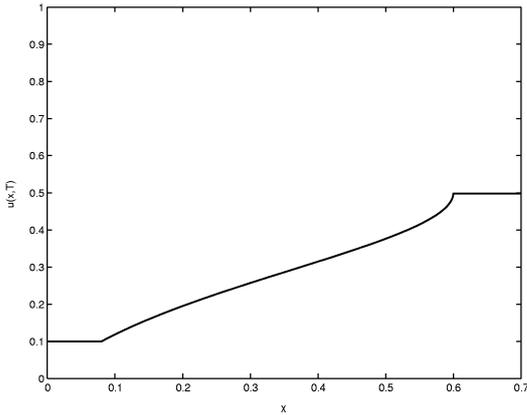


Figura A.3: Rarefação com  $u_L < u_R$

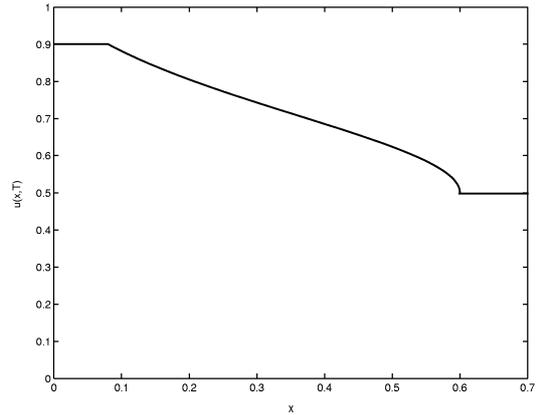


Figura A.4: Rarefação com  $u_L > u_R$

*Choque Simples:* Um choque é uma solução do tipo

$$u(x, t) \begin{cases} u_L, & \text{se } \frac{x}{t} \leq \sigma \\ u_R, & \text{se } \frac{x}{t} > \sigma \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

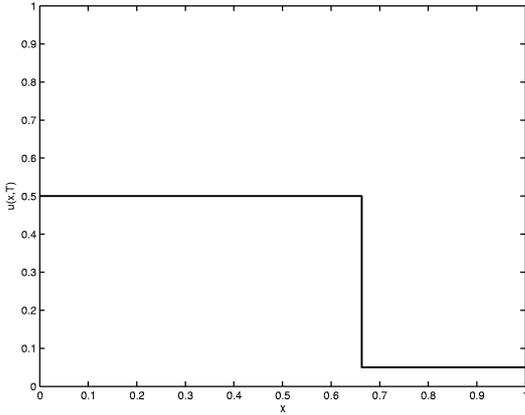
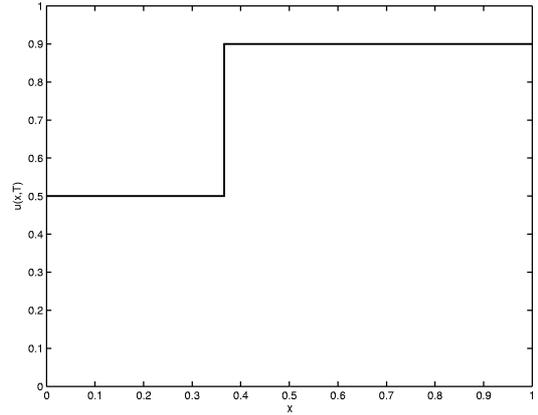
ou seja, uma onda de choque é uma descontinuidade que se propaga com velocidade  $\sigma$ . Uma onda de choque deve satisfazer a relação de Rankine-Hugoniot:

$$f(u_L) - f(u_R) = \sigma(u_L - u_R) \quad (\text{A.7})$$

No entanto, apenas a relação de Rankine-Hugoniot, (A.7), não é suficiente. Para que um choque de velocidade  $\sigma$  seja admissível na solução do problema de Riemann, ou seja, para que uma solução por choque faça sentido do ponto de vista físico, ele deve satisfazer uma condição de entropia. Existem várias condições de entropia. Neste trabalho usaremos a condição de entropia de Oleinik, que é dada por:

$$\frac{f(u_R) - f(u)}{u_R - u} \leq \sigma, \text{ para todo } u \text{ entre } u_L \text{ e } u_R. \quad (\text{A.8})$$

Nas Figuras A.5 e A.6 temos o exemplo de duas soluções por choque. Na primeira,  $(u_L = 0.5, f(u_L))$  e  $(u_R = 0.1, f(u_R))$ , estão na região de convexidade. Na segunda  $(u_L = 0.5, f(u_L))$  e  $(u_R = 0.9, f(u_R))$  estão na região de concavidade.

Figura A.5: Rarefação com  $u_L < u_R$ Figura A.6: Rarefação com  $u_L > u_R$ 

*Composição Rarefação-Choque:* Quando  $(u_L, f(u_L))$  está na região de convexidade e  $(u_R, f(u_R))$  está na região de concavidade, ou vice-versa, uma solução por rarefação simples ou choque simples, não é possível. Uma vez que nem a função  $f'$  é monotonamente crescente, nem a condição de Oleinik é satisfeita. Para obter a solução construímos o fecho convexo da região abaixo do gráfico de  $f$  para  $u$  entre  $u_L$  e  $u_R$ , da função de fluxo. Na Figura A.7 temos o fecho convexo da função de fluxo, para  $u_L = 0.9$  e  $u_R = 0.1$ . Dessa forma, a solução consiste de uma rarefação de  $u_L$  até  $u^*$ , seguida por um choque de  $u^*$  até  $u_R$ , cuja expressão é

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & \text{se } \frac{x}{t} \leq f'(u_L), \\ U\left(\frac{x}{t}\right), & \text{se } f'(u_L) < \frac{x}{t} \leq f'(u^*) = \sigma, \\ u_R, & \text{se } \frac{x}{t} \geq \sigma. \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

onde o valor de  $u^*$  é obtido da equação

$$f'(u^*) = \frac{f(u_R) - f(u^*)}{u_R - u^*}, \quad (\text{A.10})$$

e  $\sigma$  é a velocidade do choque entre  $u^*$  e  $u_R$ , que é dada pela relação de Rankine-Hugoniot, (A.7):

$$f(u^*) - f(u_R) = \sigma(u^* - u_R) \quad (\text{A.11})$$

Observando a equação (A.10) notamos que é de fundamental importância determinar pontos do tipo  $(u^*, f(u^*))$  em que a inclinação da tangente ao gráfico de  $f$  seja coincidente com a inclinação da secante ao gráfico de  $f$  que passa pelos pontos  $(u_R, f(u_R))$  e  $(u^*, f(u^*))$